Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi

Trainingsheft Analysis wissenschaftlicher Taschenrechner

18 Aufgaben aus der Analysis
zur Bearbeitung mit dem
wissenschaftlichen Taschenrechner

Freiburger Verlag

Notiz-Rand

Inhaltsverzeichnis

Notiz-Rand

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Dieses Übungsbuch ist optimal für die Vorbereitung auf die Analysis-Aufgaben des Mathematik-Abiturs. Es enthält Aufgaben mit Tipps und Lösungen, die mit einem wissenschaftlichem Taschenrechner zu lösen sind.

Das Übungsbuch fördern das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Am Anfang jeder Aufgaben gibt es einige Stichworte, so dass gezielt geübt werden kann. Es ist so eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Ausführliche Lösungen...

... befinden sich im dritten Teil des Buches und helfen, die Lösungswege gedanklich gut nachvollziehen zu können.

Allen SchülerInnen, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

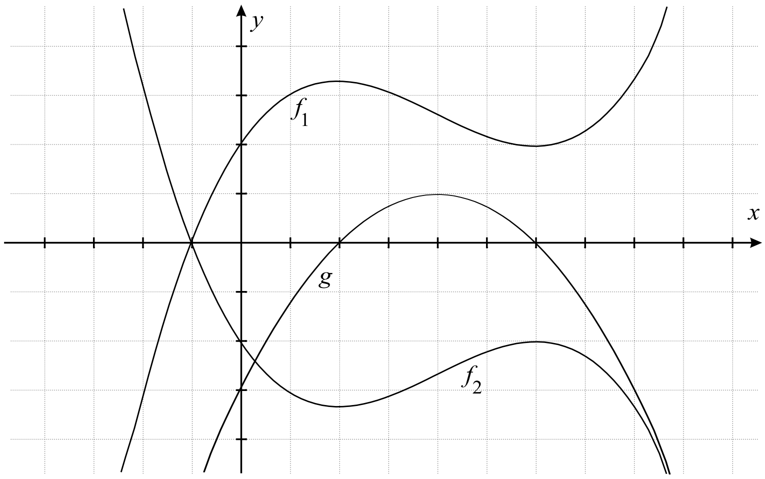
Notiz-Rand

1. Aufgabe

Tipps ab Seite 23, Lösungen ab Seite 32

- Graphen zuordnen
- Integral berechnen
- Koordinatenachsen beschriften
- Ganzrationale Funktionen

a) Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$. In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen g, f_1 und f_2 dargestellt:



Entscheiden Sie, welche der beiden Funktionen f_1 oder f_2 eine Stammfunktion von g ist. Geben Sie dafür zwei (verschiedene) Gründe an.

b) Beschriften Sie in der gegebenen Abbildung die Achsen mit einer geeigneten Skala.

c) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt A der Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt, $\frac{8}{3}$ FE beträgt.

2. Aufgabe

Tipps ab Seite 23, Lösungen ab Seite 33

- Bewegungsaufgabe
- Integral berechnen
- Funktionswerte berechnen
- Tangente berechnen

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird beschrieben durch

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}\,;\ t \geqslant 0$$

(Zeit t in min, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von v:

Notiz-Rand

Tipps

1. Aufgabe

a) Beachten Sie, dass der Graph von g eine Parabel ist. Überlegen Sie, welche Steigung eine Stammfunktion von g an bestimmten Punkten hat und welcher Art der Extrempunkt des Graphen der Stammfunktion ist (Hoch- oder Tiefpunkt), wenn g einen Vorzeichenwechsel an einer Nullstelle hat.

b) Zur Beschriftung der Achsen berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts mithilfe der 1. Ableitung. Alternativ können Sie auch eine Wertetabelle aufstellen.

c) Den Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von g und der positiven x-Achse erhalten Sie durch Integration über eine Stammfunktion von g; die Integrationsgrenzen sind dabei die Nullstellen von g.

2. Aufgabe

a) Setzen Sie $t = 1$ in $v(t)$ ein. Beachten Sie, dass das Ergebnis die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ hat und rechnen Sie das erhaltene Ergebnis in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um.

b) Die Strecke s, die das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, erhalten Sie mithilfe eines Integrals: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$.

c) Zur Bestimmung der Gleichung der Tangente benötigen Sie den Funktionswert zum Zeitpunkt t_0 , also $v\,(t_0)$, sowie die zugehörige Steigung m, welche Sie mithilfe der 1. Ableitung von v bestimmen.
Setzen Sie diese in die allgemeine Tangentengleichung $y = v'\,(t_0) \cdot (t - t_0) + v\,(t_0)$ ein.
Das Motorboot kommt zum Stillstand, wenn die neue Geschwindigkeit, die durch die Tangentengleichung beschrieben wird, Null ist. Setzen Sie also $y = 0$ und lösen Sie die Gleichung nach t auf.

3. Aufgabe

a) Überlegen Sie, wie die Graphen steigen bzw. fallen und welche Bedeutung die Asymptoten der beiden Graphen haben.
Bestimmen Sie eine allgemeine Stammfunktion und verwenden Sie die Bedingung, dass der Körper zu Beginn $(t = 0)$ keine Medikamentenmenge aufweist.

b) Berechnen Sie das Integral mithilfe einer geeigneten Stammfunktion, die Sie durch lineare Integration erhalten. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Interpretieren Sie das Integral als Summe.

c) Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen diese durch Logarithmieren. Beachten Sie die Einheit von x.

Notiz-Rand

frv.tv/da

1. Aufgabe

a) Es ist $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$. Dies ist die Gleichung einer Parabel und f_2 ist eine Stammfunktion von g. Dies kann folgendermaßen begründet werden:
Da $g(0) < 0$, muss eine Stammfunktion von g für $x = 0$ eine negative Steigung besitzen.
Da g bei der kleineren der beiden Nullstellen einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat, muss eine Stammfunktion von g an dieser Stelle ein Minimum haben. Entsprechend liegt bei der anderen Nullstelle von g ein VZW von $+$ nach $-$ vor; eine Stammfunktion muss dort ein Maximum haben.
Da der Graph von g einen Hochpunkt mit positivem y-Wert hat, muss der Graph der Stammfunktion von g an der entsprechenden Stelle einen Wendepunkt mit positiver Steigung haben.
Da der Graph von g eine nach unten geöffnete Parabel ist und somit der Koeffizient a von ax^2 negativ ist, muss bei einer Stammfunktion von g der Koeffizient b von bx^3 ebenfalls negativ sein, so dass der Graph der Stammfunktion für große positive x-Werte eine negative Steigung hat und die Funktionswerte gegen $-\infty$ gehen.

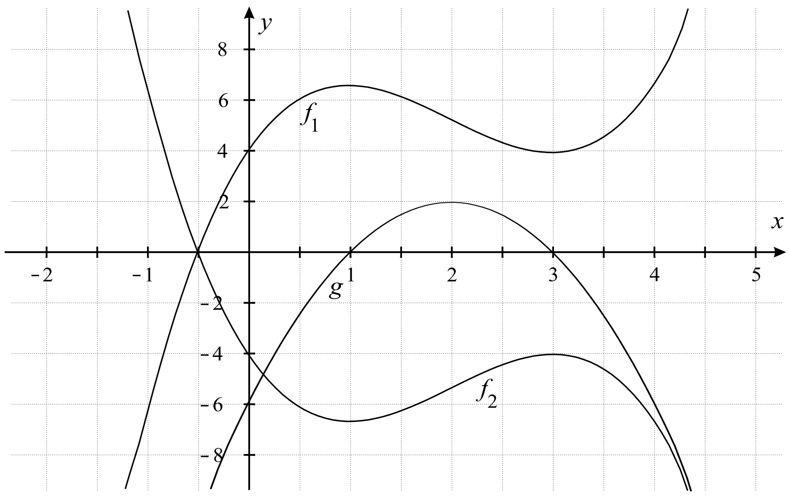
b) Um die Achsen geeignet zu beschriften, bestimmt man den Extrempunkt des Graphen von g.
Diesen erhält man mithilfe der 1. Ableitung von g:

$$g'(x) = -2 \cdot 2x + 8 = -4x + 8$$

Die notwendige Bedingung $g'(x) = 0$ führt zu $-4x + 8 = 0$ mit der Lösung $x = 2$.
Setzt man $x = 2$ in $g(x)$ ein, so erhält man den y-Wert: $g(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6 = 2$.
Somit hat der Extrempunkt, der Scheitel der Parabel, die Koordinaten $S(2 \mid 2)$.
Alternativ kann man in diesem Fall auch eine Wertetabelle aufstellen:

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	-6	0	2	0	-6

Nun können die Achsen beschriftet werden.
Für die x-Achse gilt: 1 LE $\widehat{=}$ 2 Hilfsgitterlinien, für die y-Achse gilt: 2 LE $\widehat{=}$ 1 Hilfsgitterlinien.



c) Um den Flächeninhalt A der Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt, zu berechnen, verwendet man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ von g:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 \left(-2x^2+8x-6\right) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{2}{3}\cdot 3^3+4\cdot 3^2-6\cdot 3\right)-\left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3+4\cdot 1^2-6\cdot 1\right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A beträgt $\frac{8}{3}$ FE.

2. Aufgabe

Es ist $v(t) = 960\cdot e^{-t} - 960\cdot e^{-2t}$; $t \geqslant 0$ (Zeit t in min, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$).

a) Die Geschwindigkeit des Motorbootes nach einer Minute erhält man, indem man $t = 1$ in $v(t)$ einsetzt:

$$v(1) = 960\cdot e^{-1} - 960\cdot e^{-2\cdot 1} \approx 223$$

Die Geschwindigkeit des Motorboots nach einer Minute beträgt etwa 223 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$.
Um die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ anzugeben, erweitert man den Bruch mit 60:

$$v(1) = 223\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 223\cdot\frac{60\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{min}} = \frac{13\,380\,\mathrm{m}}{\mathrm{h}} = 13{,}38\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Somit ist die Geschwindigkeit des Motorboots nach einer Minute kleiner als 15 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

b) Die Strecke s, die das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, erhält man mithilfe eines Integrals:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 v(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \left(960\cdot e^{-t} - 960\cdot e^{-2t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{960}{-1}\cdot e^{-t} - \frac{960}{-2}\cdot e^{-2t}\right]_0^2 \\ &= \left(-960\cdot e^{-2} + 480\cdot e^{-2\cdot 2}\right) - \left(-960\cdot e^{-0} + 480\cdot e^{-2\cdot 0}\right) \\ &\approx 358{,}9 \end{aligned}$$

Das Motorboot ist in den ersten zwei Minuten etwa 359 m weit gefahren.

c) Zur Bestimmung der Gleichung der Tangente benötigt man den Funktionswert zum Zeitpunkt $t_0 = 2{,}55$, also $v(2{,}55) \approx 69{,}11$, sowie die zugehörige Steigung, die man mit der 1. Ableitung von v ermitteln kann. Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$v'(t) = 960\cdot e^{-t}\cdot(-1) - 960\cdot e^{-2t}\cdot(-2) = -960\cdot e^{-t} + 1920\cdot e^{-2t}$$

Setzt man $t_0 = 2{,}55$ in $v'(t)$ ein, erhält man:

$$m = v'(2{,}55) = -960\cdot e^{-2{,}55} + 1920\cdot e^{-2\cdot 2{,}55} \approx -63{,}25$$