

Neumann | Rosner

ClassPad Learning: Abitur

gut erklärt mit
zusätzlich über 80 Videos

1. Auflage





Stefan Rosner, geb. 1979,
studierte Mathematik in
Mannheim und unterrichtet
seit 2005 in der Oberstufe.

ClassPad Learning - Einführung	7
I. Grundlagen Analysis	23
1 Funktionen	24
1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)	24
1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen	26
1.3 Gebrochenrationale Funktionen	28
1.4 Exponentialfunktionen	30
1.5 Trigonometrische Funktionen	32
1.6 Wurzelfunktion	34
1.7 Natürliche Logarithmusfunktion (nur LK)	34
1.8 Umkehrfunktion	35
1.9 Spiegeln, Strecken und Verschieben	36
1.10 Funktionenscharen	38
1.11 Symmetrie zur y -Achse bzw. zum Ursprung	40
1.12 Abschnittsweise definierte Funktionen	41
1.13 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze	41
2 Gleichungen	42
2.1 Gleichungstypen: Übersicht	42
2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen	44
2.3 Polynomdivision	51
2.4 Lineare Gleichungssysteme	52
3 Differenzialrechnung	54
3.1 Ableitungsregeln	54
3.2 Tangente und Normale	57
3.3 Schnittpunkte (Berührungspunkt, senkrechter Schnitt, Schnittwinkel)	60
3.4 Monotonie	62
3.5 Krümmung	63
3.6 Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)	64
3.7 Wendepunkte	65
3.8 Sattelpunkte	66
3.9 Ortskurve	68
3.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung	70
3.11 Ermittlung von Funktionsgleichungen (Steckbriefaufgaben, Regression)	72
3.12 Extremwertaufgaben	76
3.13 Wachstum und Zerfall	78
4 Integralrechnung	80
4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)	80
4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x -Achse	84
4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern	86

4.4 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen Schaubild und x -Achse
rotiert um die x -Achse (nur LK) 88

4.5 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen zwei Schaubildern
rotiert um die x -Achse 89

4.6 Mittelwert (durchschnittlicher y -Wert) einer Funktion 90

4.7 Flächen, die bis ins Unendliche reichen (Uneigentliche Integrale) (nur LK) . . . 91

4.8 Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben 92

II. Grundlagen Vektorgeometrie 95

1 Grundlagen 96

1.1 Punkte (im \mathbb{R}^3) 96

1.2 Vektoren (im \mathbb{R}^3) 96

1.3 Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, Betrag, Skalare Multiplikation,
Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Skalarprodukt,
Vektorprodukt) 97

2 Geraden 100

2.1 Geradengleichungen in Parameterform 100

2.2 Gegenseitige Lage von Geraden 102

3 Ebenen 104

3.1 Ebenengleichungen in Parameterform 104

3.2 Ebenengleichungen in Normalenform 106

3.3 Ebenengleichungen in Koordinatenform 108

3.4 Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem 109

3.5 Umwandlungen der Ebenenformen 110

4 Gegenseitige Lage 114

4.1 Ebene-Gerade 114

4.2 Ebene-Ebene 116

5 Schnittwinkel 119

6 Abstandsberechnungen 120

6.1 Abstände zu einem Punkt 121

6.2 Abstände zu einer Geraden 124

6.3 Abstände zu einer Ebene 125

7 Spiegelungen 126

8 Zusatz: Bewegungsaufgaben 128

9 Matrizen 130

9.1 Begriffe zur Matrix 130

9.2 Rechnen mit Matrizen 131

9.3 Die inverse Matrix 132

9.4 Abbildungen und Matrizen 133

10 Beschreibung von stoch. Prozessen durch Matrizen 136

10.1	Stochastische Übergangsprozesse (Austauschprozesse)	136
10.2	Stabiler Vektor (stationäre Verteilung) und Grenzmatrix	138
10.3	Absorbierender Zustand	139
10.4	Populationsprozesse	140
III. Grundlagen Stochastik		
1	Baumdiagramm und Pfadregeln	146
1.1	Einführung	146
1.2	Aufgabentypen	149
2	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel	152
2.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit	152
2.2	Unabhängigkeit	154
2.3	Vierfeldertafel	155
2.4	Zusammenhänge und Vernetzung	156
3	Kombinatorik	162
3.1	Übersicht: Berechnung von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten	162
3.2	Beispielaufgaben	164
4	Zufallsvariable und Erwartungswert	166
5	Binomialverteilung	170
5.1	Bernoulliformel	170
5.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung	172
5.3	Erwartungswert und Standardabweichung	173
5.4	Aufgabentypen	174
6	Der Hypothesentest	176
6.1	Einseitiger Hypothesentest: Ausführliche Erklärung	176
6.2	Einseitiger Hypothesentest: Vorgehen am Beispiel	177
6.3	Fehler 1. Art und 2. Art	180
6.4	Zweiseitiger Hypothesentest (nur LK)	182
7	Prognose- und Konfidenzintervalle	184
7.1	Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten (Sigma-Regeln)	184
7.2	Vertrauensintervalle (Konfidenzintervalle) für Wahrscheinlichkeiten	188
7.3	Stichprobenumfang und Länge des Vertrauensintervalls (nur LK)	188
7.4	Zusammenhang: Sigma-Regeln und Vertrauensintervalle	189
8	Normalverteilung (nur LK)	190
8.1	Einführung	190
8.2	Aufgabentypen	191
8.3	Die Normalverteilung für binomialverteilte Probleme nutzen	192

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch soll Sie ergänzend zu ClassPad Learning unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- die Abitursaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch soll Sie im Zusammenspiel mit ClassPad Learning dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

Zusätzlich

über 80 Videos, in welchen alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt werden.
Zugriff über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

über Fragen oder Anregungen zu den Inhalten dieses Buches freue ich mich sehr.

Stefan Rosner

(stefan_rosner@hotmail.com)

1 Für ClassPad Learning anmelden

Bei ClassPad.academy registrieren

Bevor du ClassPad Learning nutzen kannst, ist es nötig, sich zuerst bei ClassPad.academy zu registrieren: ClassPad.academy rufst du im Internet auf unter ClassPad.academy

Im Video, das du unter frv.tv/cp ansehen kannst, wird ClassPad Learning vorgestellt.

Zuerst klickst du auf «jetzt registrieren», das steht etwas kleiner rechts unten im Fenster. Im Screenshot ist es mit einem roten Pfeil gekennzeichnet:



Im nächsten Schritt wählst du den linken Button «Als Schüler*in registrieren» aus und klickst diesen:

Nun gibst du deine persönlichen Daten an. Dabei ist der «Rufname» der Name, wie du in der Klasse in ClassPad.academy angezeigt wirst. Danach musst du noch bestätigen, dass du entweder

älter als 16 Jahre alt bist, oder das Einverständnis deiner Eltern hast. Zum Schluss bestätigst du noch die Nutzungsbedingungen.

Als Schüler*in registrieren

Die Registrierung ist kostenlos und bietet dir Zugriff auf alle kostenlose Inhalte wie der ClassPad Editor oder Mathe-Marathon. ClassPad Learning und ClassPad Plus können optional kostenpflichtig aktiviert werden.

ROLLE WECHSELN

Vorname	Nachname
<input type="text"/>	<input type="text"/>
Rufname	E-Mail-Adresse
So werde ich in der Klasse genannt, z.B. Alex	Die E-Mail-Adresse darf nicht bereits vergeben sein
<input type="text"/>	<input type="text"/>
Passwort	
Bitte wähle ein sicheres Passwort.	
<input type="text"/>	

Ich bin 16 Jahre alt oder älter.

Ich bin unter 16 Jahre alt und habe das Einverständnis einer erziehungsberechtigten Person.

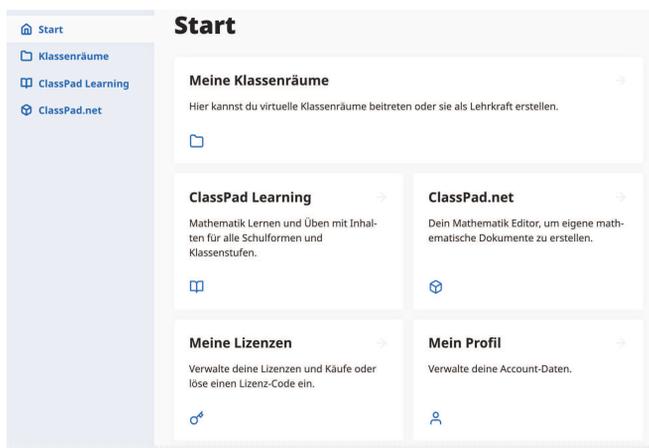
Hiermit akzeptiere ich die [Nutzungsbedingungen](#) und nehme die Hinweise zum [Datenschutz](#) zur Kenntnis.

ABSENDEN

WICHTIG: Um dich in weiter einloggen zu können, musst du die Email, die dir von der ClassPad.academy geschickt wurde, bestätigen.

Nun bist du auf der Startseite. Diese besteht aus mehreren Bereichen.

- Ganz links befindet sich das Menü. Hier kannst du direkt den Bereich auswählen, den du nutzen willst.
- In der Mitte werden die verschiedenen Bereiche auch noch als Kacheln angezeigt.



🔑 Meine Lizenzen

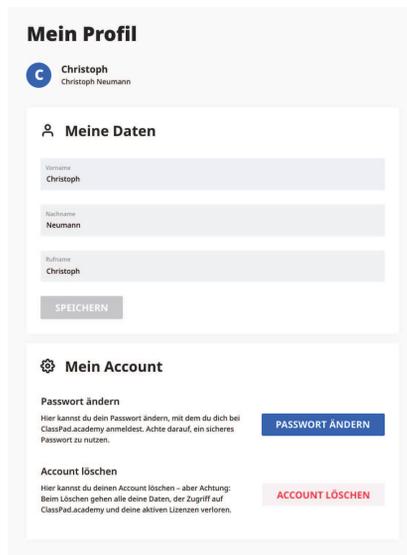
Um ClassPadd Learning nutzen zu können brauchst du eine Lizenz. Die bekommst du entweder von deiner Lehrerin bzw. deinem Lehrer oder du kannst sie auch kaufen, z.B. bei dynatech.de



Um den Lizenzcode einzugeben, klickst du einmal, dann öffnet sich ein Dialogfenster und du kannst den Code eingeben.

👤 Mein Profil

Auf der Profilsseite kannst du sehen, welche Daten von dir gespeichert sind. Diese kannst du entsprechend ändern und anpassen.

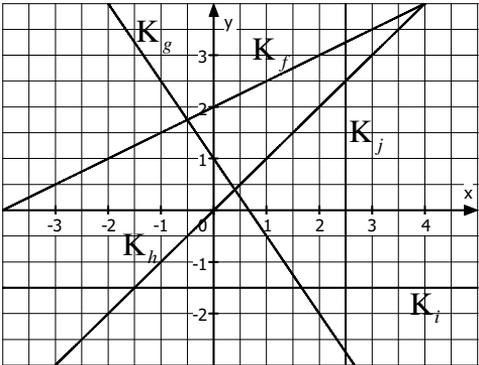
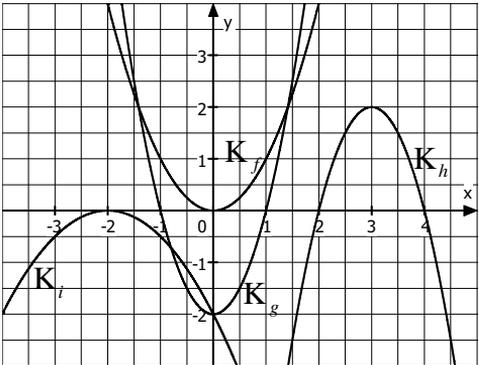


Auch das Passwort kann hier geändert werden. Wenn du auf den entsprechenden Button klickst, öffnet sich ein Dialogfenster:

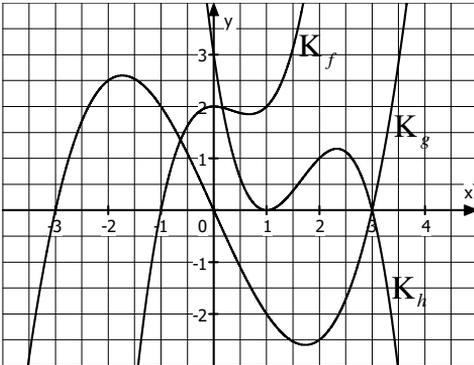
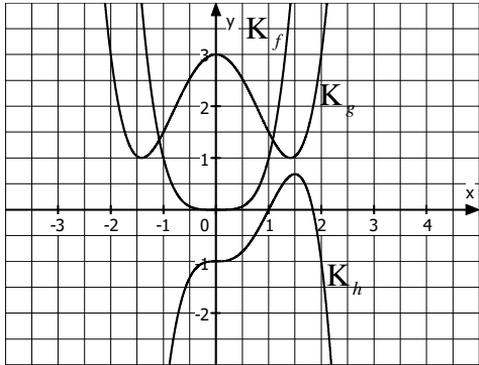


1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
<p>Hauptform : $y = mx + b$</p> <p>Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen- abschnitt}$</p> <p>Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$</p> <p>Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$</p> <p>1. Winkelhalbierende: $y = x$ ($m = 1$) 2. Winkelhalbierende: $y = -x$ ($m = -1$)</p>  <p>$K_f: y = \frac{1}{2}x + 2$ $K_g: y = -\frac{3}{2}x + 1$ $K_h: y = x$ (1. Winkelhalbierende) $K_i: y = -1,5$ $K_j: x = 2,5$</p>	<p>Allg.: $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s y_s)$</p> <p>$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 c)$</p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p>$K_f: f(x) = x^2$ $K_g: g(x) = 2x^2 - 2$ $K_h: h(x) = -2(x - 3)^2 + 2$ $K_i: i(x) = -0,5x^2 - 2x - 2$</p>



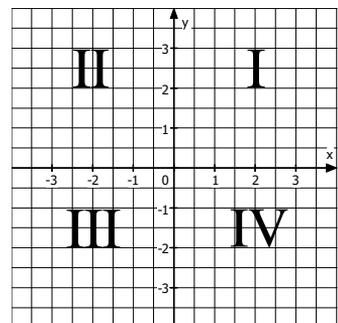
3. Grades	4. Grades
<p>Allg.: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von III nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von II nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 d)$</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)</p>	<p>Allg.: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$</p> <p>$a > 0$: Verlauf von II nach I</p> <p>$a < 0$: Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 e)$</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)</p>
 <p>$K_f: f(x) = x^3 - x^2 + 2$</p> <p>$K_g: g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$</p> <p>$K_h: h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$</p>	 <p>$K_f: f(x) = x^4$</p> <p>$K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3$</p> <p>$K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$</p>

Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)

$a > 0$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)

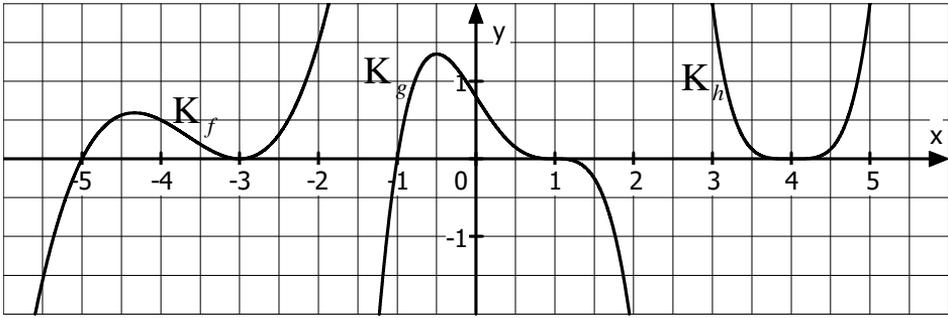
$a < 0$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



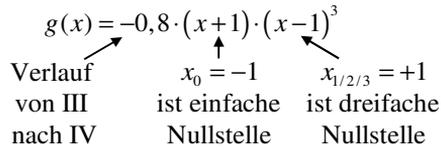
1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele

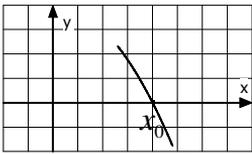
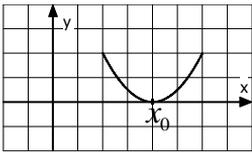
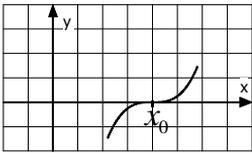
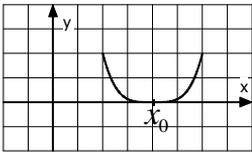


$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$
 $K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$
 $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)



Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

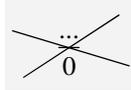
Vielfachheit Nullstelle	Faktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild schneidet x -Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild berührt x -Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild schneidet und berührt x -Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$		Schaubild berührt x -Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg. $f(x) = \frac{\text{(ganzzahlige) Funktion}}{\text{(ganzzahlige) Funktion}}$ Beispiel: $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{x+2}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$)

1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

Zu x -Werten, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, kann kein y -Wert errechnet werden, da nicht durch 0 geteilt werden darf.



Diese x -Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten und stellen somit **Definitionslücken** dar.

An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.

Fall 1: Polstelle mit Vorzeichenwechsel (einfache Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$)
 Senkrechte Asymptote: $x = 1$
 Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow -\infty$
 Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$

Fall 2: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (doppelte Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$)
 Senkrechte Asymptote: $x = 1$
 Für $x \rightarrow 1$ ($x < 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$
 Für $x \rightarrow 1$ ($x > 1$) gilt: $f(x) \rightarrow +\infty$

Fall 3 (Ausnahme): Keine Polstelle (auch Nullstelle des Zählers)

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ (mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$)
 Keine senkrechte Asymptote (trotz Definitionslücke)
 Grund: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = x + 1$
 Die Definitionslücke ist nach dem Kürzen „verschwunden“. Sie ist also (be-)hebbar.
 (Wobei die Ausgangsfunktion diese noch immer aufweist, siehe Schaubild.)

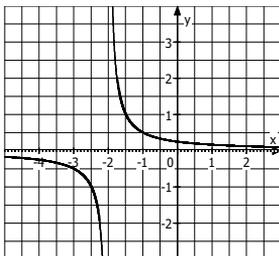


2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$)

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad: x -Achse ist waagrechte Asymptote

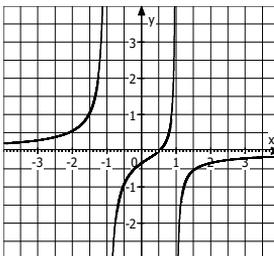
$$f(x) = \frac{1}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 0} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



$$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2-3} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

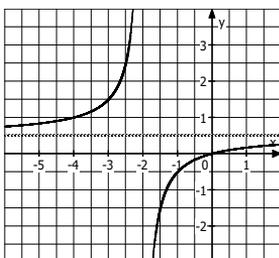
waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x -Achse)



Fall 2: Zählergrad = Nennergrad: Waagrechte Asymptote

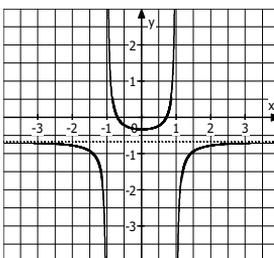
$$f(x) = \frac{1x}{2x+4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote: $y = \frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{-2x^2+1}{3x^2-3} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 2} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

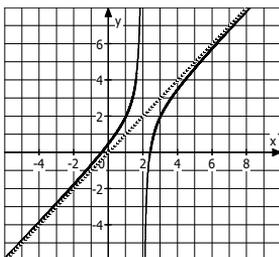
waagrechte Asymptote: $y = -\frac{2}{3}$



Fall 3: Zählergrad > Nennergrad: Sonstige Asymptoten (nicht waagrecht)

$$f(x) = \frac{x^2-2x-1}{x-2} = x - \frac{1}{x-2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 2} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

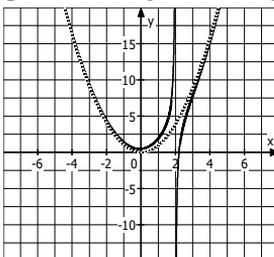
schiefe Asymptote: $y = x$



Schiefe Asymptote, da Zählergrad um 1 höher als Nennergrad.

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-1}{x-2} = x^2 - \frac{1}{x-2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Grad 3} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

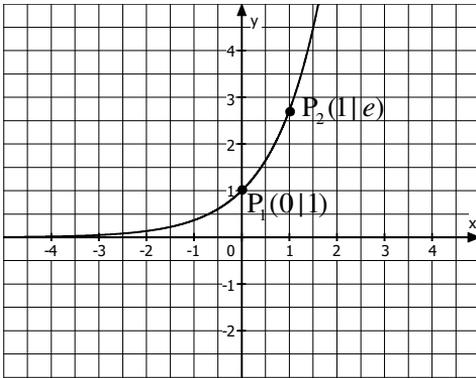
parabelförmige Näherungskurve: $y = x^2$



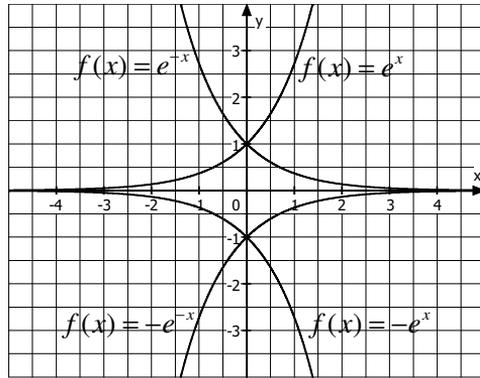
Für die obige Umformungen * ist eine Polynomdivision (S. 51) nötig.

1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf : $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

a - Streckung / Stauchung in y-Richtung

$a > 1$: „steiler“

$0 < a < 1$: „flacher“

$(a < 0$: an der x-Achse gespiegelt)

b - ansteigendes oder fallendes Schaubild

$b > 0$: ansteigendes Schaubild

$b < 0$: fallendes Schaubild

(bzw. an der y-Achse gespiegelt)

c - Verschiebung in x-Richtung

$c > 0$: nach rechts

$c < 0$: nach links

d - Verschiebung in y-Richtung

($y = d$ ist Asymptote)

$d > 0$: nach oben

$d < 0$: nach unten

Vorsicht beim Koeffizienten c

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

