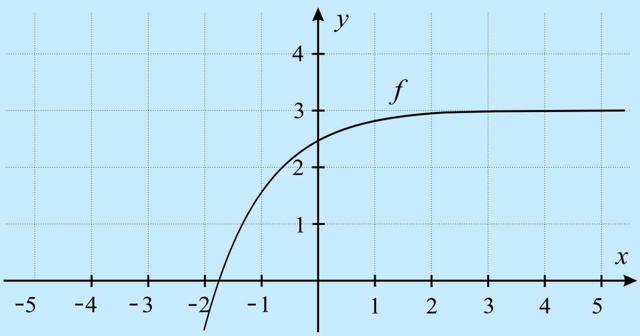
Analysis A 1

Vorbereitungszeit: 20 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (WTR), Formeldokument

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph sei K_f.



a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von K_f mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von K_f.

b) Beschreiben Sie, wie K_f aus dem Graph der Funktion e^x hervorgegangen ist. Begründen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

c) Erläutern Sie, wie man den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graph von f, der Geraden mit der Gleichung $y = 3$, der y-Achse und der Geraden $x = 4$ bestimmen kann.

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ist eine Tangente an K_f. Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts B erhalten kann.

e) Beurteilen Sie folgende Aussage: «Es gibt ganzrationale Funktionen vierten Grades, deren Graphen drei Wendepunkte besitzen».

Tipps A 1

a) Den Schnittpunkt S von K_f mit der y-Achse erhalten Sie, indem Sie $x = 0$ in $f(x)$ einsetzen. Den Schnittpunkt N von K_f mit der x-Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren nach x auflösen.
Zur Bestimmung der Gleichung der Asymptote beachten Sie, dass e^{-x} für $x \longrightarrow \infty$ gegen Null geht.

b) Überlegen Sie, wie K_f aus dem Graph der Exponentialfunktion e^x durch Spiegelungen, Streckungen oder Verschiebungen hervorgeht.
Um zu begründen, dass f streng monoton wachsend ist, verwenden Sie die 1. Ableitung von f, die Sie mit der Kettenregel erhalten. Beachten Sie, dass $e^{-x} > 0$ gilt.
Falls $f'(x) > 0$, ist f streng monoton wachsend.

c) Den gesuchten Flächeninhalt erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Beachten Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ oberhalb des Graphen von f verläuft und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

d) Beachten Sie, dass im Berührpunkt B die Steigung gleich groß ist wie die Steigung der gegebenen Geraden. Stellen Sie eine Gleichung auf und überlegen Sie, wie Sie den zugehörigen y-Wert erhalten.

e) Verwenden Sie als Ansatz für eine ganzrationale Funktion f vierten Grades die Gleichung $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ sowie deren Ableitungen. Beachten Sie, dass als notwendige Bedingung für Wendepunkte des Graphen von f die Gleichung $f''(x) = 0$ zu lösen ist. Überlegen Sie, wie viele Lösungen diese Gleichung maximal hat und was dies für die maximale Anzahl der Wendepunkte des Graphen von f bedeutet.

Lösungen A 1

a) Es ist $f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$.
Den Schnittpunkt S von K_f mit der y-Achse erhält man, indem man $x = 0$ in $f(x)$ einsetzt:

$$f(0) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-0} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 2{,}5 \;\Rightarrow\; \mathrm{S}(0 \mid 2{,}5)$$

Den Schnittpunkt N von K_f mit der x-Achse erhält man, indem man die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren nach x auflöst:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} &= 0 \\ 3 &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \\ 6 &= e^{-x} \\ \ln(6) &= -x \\ -\ln(6) &= x \end{aligned}$$

Damit hat der Schnittpunkt mit der x-Achse die Koordinaten $\mathrm{N}(-\ln(6) \mid 0)$.
Für $x \to \infty$ geht e^{-x} gegen Null, damit geht $h(x) = 3 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$ gegen 3.
Somit lautet die Gleichung der waagrechten Asymptote: $y = 3$.

b) Der Graph K_f geht aus dem Graph der Exponentialfunktion e^x durch folgende Operationen hervor:

- Spiegelung an der y-Achse
- Spiegelung an der x-Achse
- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ (Stauchung)
- Verschiebung in y-Richtung um 3 LE nach oben.

Um zu begründen, dass f streng monoton wachsend ist, verwendet man die 1. Ableitung von f, die man mit der Kettenregel erhält:

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$$

Wegen $e^{-x} > 0$ gilt: $f'(x) > 0$. Somit ist f streng monoton wachsend.

c) Den Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graph von f, der Geraden mit der Gleichung $y = 3$, der y-Achse und der Geraden $x = 4$ erhält man mithilfe eines Integrals. Da die Gerade oberhalb des Graphen von f verläuft, ergibt sich mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\mathrm{A} = \int_0^4 (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$$

d) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ist eine Tangente an K_f. Die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts B erhält man, indem man die Gleichung $f'(x) = \frac{1}{2}$ nach x auflöst, da im Punkt B die Steigung gleich groß ist wie die der gegebenen Geraden. Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man den erhaltenen x-Wert in $f(x)$ oder in die Tangentengleichung einsetzt.

e) Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades hat allgemein die Gleichung

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

mit

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

und

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Als notwendige Bedingung für Wendepunkte des Graphen von f löst man die Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auf, also

$$12ax^2 + 6bx + 2c = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, welche maximal zwei Lösungen für x hat. Damit hat der Graph von f auch nur maximal zwei Wendepunkte.
Somit gibt es keine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt.

Geometrie G 1

Vorbereitungszeit: 20 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (WTR), Formeldokument

Gegeben sind die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$\mathrm{E}: 2x_1 - x_3 = 6$$

a) Begründen Sie, dass sich g und E schneiden und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S von g und E.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel von g und E.

c) Die Gerade g wird an der Ebene E gespiegelt. Erläutern Sie ein Verfahren, wie man die Gleichung der Spiegelgeraden g^* erhalten kann.

d) Die Gerade h ist parallel zu E und schneidet gleichzeitig die Gerade g orthogonal. Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man eine Gleichung von h bestimmen kann.

Tipps G 1

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt des Richtungsvektors $\vec{u}$ von g mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ von E: $\vec{u} \circ \vec{n}$.
Setzen Sie den allgemeinen Punkt P_λ von g in E ein, lösen die Gleichung nach λ auf und setzen Sie den erhaltenen λ-Wert in P_λ ein, um den Schnittpunkt zu erhalten.

b) Verwenden Sie die Formel $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$, wobei $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von g und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E ist.

c) Skizzieren Sie die Problemstellung. Verwenden Sie eine Lotgerade, den Lotfußpunkt und eine geeignete Vektorkette. Stellen Sie g^* mithilfe eines Spielgelpunktes und eines geeigneten Richtungsvektors auf.

d) Skizzieren Sie die Problemstellung. Verwenden Sie den Ansatz: $h\colon \vec{x} = \vec{a} + \mu \cdot \vec{v}$. Beachten Sie, dass $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{u}$ und senkrecht zu $\vec{n}$ sein muss. Verwenden Sie das Vektorprodukt.

Lösungen G1

a) Um zu begründen, dass sich g und E schneiden, berechnet man das Skalarprodukt des Richtungsvektors $\vec{u}$ der Geraden g und des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E:

$$\vec{u} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2$$

Wegen $\vec{u} \circ \vec{n} \neq 0$ existiert ein Schnittpunkt, da g nicht parallel zu E ist.
Man erhält die Koordinaten des Schnittpunts, indem man den allgemeinen Punkt

$$\mathrm{P}_\lambda(2+\lambda \mid -3+2\lambda \mid 2)$$

von g in die Koordinatengleichung von $\mathrm{E}\colon\ 2x_1 - x_3 = 6$ einsetzt:

$$2 \cdot (2+\lambda) - 2 = 6 \;\Rightarrow\; \lambda = 2$$

Setzt man $\lambda = 2$ in P_λ ein, ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts $\mathrm{S}(4 \mid 1 \mid 2)$.

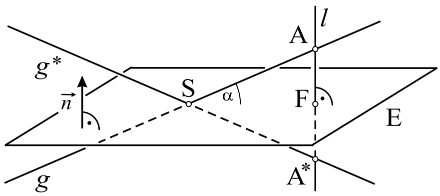
b) Den Schnittwinkel α von g und E erhält man mithilfe der Formel $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.
Dabei ist $\vec{u}$ der Richtungsvektor von g und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E:

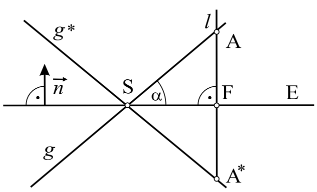
$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+0^2} \cdot \sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow\; \alpha \approx 23{,}58^\circ$$

c) Die Situation kann entweder perspektivisch (links) oder von der Seite skizziert werden:





Zuerst stellt man die Gleichung der Lotgeraden l auf, die durch den Stützpunkt A der Geraden g verläuft und orthogonal zu E ist, d.h. der Normalenvektor von E ist der Richtungsvektor von l:

$$l\colon \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

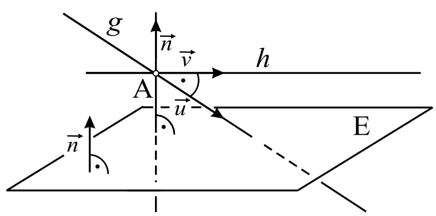
Dann schneidet man l mit E. Dies ergibt den Lotfußpunkt F.
Man erhält neben S einen weiteren Punkt A^* auf der Spiegelgeraden g^*, indem man eine Vektorkette aufstellt:

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AF}$$

Mithilfe von S und A^* kann man die Gleichung der Spiegelgeraden g^* aufstellen:

$$g^*\colon \vec{x} = \vec{s} + \mu \cdot \overrightarrow{SA^*}$$

d) Man kann die Situation wie folgt skizzieren:



Als Ansatz für die Gerade h verwendet man den Stützvektor $\vec{a}$ von g und einen noch unbestimmten Richtungsvektor $\vec{v}$:

$$h\colon \vec{x} = \vec{a} + \mu \cdot \vec{v}$$

Da h orthogonal zu g und parallel zu E sein soll, muss $\vec{v}$ orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u}$ von g und zum Normalenvektor $\vec{n}$ von E sein. Damit erhält man $\vec{v}$ mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n}$$

Damit gilt: $h \perp g$ und $h \parallel$ E.
Anmerkung: Es sind weitere Geraden denkbar, die die geforderten Bedingungen erfüllen. Diese liegen parallel zu h und E und schneiden g orthogonal in einem anderen Punkt der Geraden g.

Stochastik S 1

Vorbereitungszeit: 20 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (WTR), Formeldokument

Beim Strafstoß («Elfmeter») gibt es drei mögliche Ereignisse:

(1) Der Schütze erzielt ein Tor.

(2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.

(3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% ein Tor.

a) Tom schießt vier Strafstöße.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
A: Er erzielt vier Tore.
B: Er erzielt mindestens drei Tore.
C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

b) Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an:
«Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir 10 Euro geben.»
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

c) In einer Fußballliga wird bei 87% aller Strafstöße ein Tor erzielt.
In einer Saison wurden 70 Strafstöße gegeben.
Erläutern Sie, wie man die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 68 Tore erzielt wurden, berechnen kann.

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der erzielten Tore und erläutern Sie die Bedeutung der beiden Größen im Sachzusammenhang.

Tipps S 1

a) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der erzielten Tore mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A erhalten Sie mithilfe der Binomialverteilung unter Verwendung des Taschenrechners. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B erhalten Sie mithilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses unter Verwendung des Taschenrechners. Um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C zu bestimmen, bezeichnen Sie mit t: er erzielt ein Tor und $\overline{t}$: er erzielt kein Tor. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einem Schuss kein Tor erzielt. Beachten Sie, dass es für das Ereignis C zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, dass er drei Tore in Folge erzielt.

b) Legen Sie x als Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, fest und bestimmen Sie mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses die Wahrscheinlichkeit, dass Tom kein Tor erzielt, in Abhängigkeit von x.
Legen Sie X als Zufallsvariable für die Einnahmen von Tom fest und bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ von Toms Einnahmen (teilweise negativ), indem Sie diese mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multiplizieren und anschließend addieren. Da das Spiel fair sein soll, lösen Sie die Gleichung $E(X) = 0$ nach x auf.

c) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der erzielten Tore mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 68 Tore erzielt wurden, erhalten Sie mithilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.
Alternativ verwenden Sie die Bernoulli-Formel: $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

d) Den Erwartungswert für die Anzahl der erzielten Tore erhalten Sie mit der Formel

$$E(X) = \mu = n \cdot p$$

Die Standardabweichung für die Anzahl der erzielten Tore erhalten Sie mit der Formel

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Beachten Sie, dass μ ein Durchschnittswert ist und die Standardabweichung eine Streuung um den Erwartungswert beschreibt.

Lösungen S 1

a) Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der erzielten Tore fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 4$ und $p = 0,8$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: « Er erzielt vier Tore.» erhält man mithilfe der Binomialverteilung:

$$P(A) = P_{0,8}^{4}(X = 4) = 0,4096$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A etwa 41,0 %.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: « Er erzielt mindestens drei Tore.» erhält man mithilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P(B) = P_{0,8}^{4}(X \geqslant 3) = 1 - P_{0,8}^{4}(X \leqslant 2) = 1 - 0,1808 = 0,8192$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B etwa 81,9 %.

Um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C: «Er erzielt genau drei Tore in Folge.» zu bestimmen, bezeichnet man mit t: er erzielt ein Tor und $\bar{t}$: er erzielt kein Tor.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einem Schuss kein Tor erzielt, beträgt

$$P(\bar{t}) = 1 - P(t) = 1 - 0,8 = 0,2$$

Für das Ereignis C gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, dass er drei Tore in Folge erzielt. Damit gilt:

$$P(C) = P(ttt\bar{t}) + P(\bar{t}ttt) = 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8^3 = 0,2048$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C etwa 20,5 %.

b) Legt man x als Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, fest, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass Tom die Torbegrenzung trifft oder das Tor verfehlt: $1 - 0,8 - x = 0,2 - x$.
Legt man X als Zufallsvariable für die Einnahmen Toms fest, so gilt für den Erwartungswert E(X):

$$E(X) = 1\,€ \cdot 0,8 + (-2\,€) \cdot x + (-10\,€) \cdot (0,2 - x) = -1,2\,€ + 8\,€ \cdot x$$

Da das Spiel fair sein soll, gilt: $E(X) = 0$. Damit ergibt sich:

$$-1,2\,€ + 8\,€ \cdot x = 0 \;\Rightarrow x = 0,15$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, 15%.

c) Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der erzielten Tore fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 70$ und $p = 0,87$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 68 Tore erzielt wurden, erhält man mithilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P_{0,87}^{70}(X \geqslant 68) = 1 - P(X \leqslant 67)$$

Alternativ kann man auch die Bernoulli-Formel verwenden:

$$\begin{aligned} P_{0,87}^{70}(X \geqslant 68) &= P_{0,87}^{70}(X = 68) + P_{0,87}^{70}(X = 69) + P_{0,87}^{70}(X = 70) \\ &= \binom{70}{68} \cdot 0,87^{68} \cdot 0,13^{2} + \binom{70}{69} \cdot 0,87^{69} \cdot 0,13^{1} + \binom{70}{70} \cdot 0,87^{70} \cdot 0,13^{0} \end{aligned}$$

d) Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der erzielten Tore fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 70$ und $p = 0,87$. Den Erwartungswert für die Anzahl der erzielten Tore erhält man mit der Formel $E(X) = \mu = n \cdot p$:

$$E(X) = 70 \cdot 0,87 = 60,9$$

Die Standardabweichung für die Anzahl der erzielten Tore erhält man mit der Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$:

$$\sigma = \sqrt{70 \cdot 0,87 \cdot 0,13} \approx 2,81$$

Der Erwartungswert von $\mu \approx 61$ gibt an, dass bei 70 Strafstößen durchschnittlich etwa 61 Tore erzielt werden.
Die Standardabweichung von $\sigma \approx 2,8$ gibt an, dass die Streuung um den Erwartungswert etwa 2,8 Tore beträgt.