Rosner

Mathe gut erklärt Abitur 2024

Baden-Württemberg
Basisfach Mathematik
Allgemeinbildende Gymnasien

10. Auflage

Freiburger Verlag

Stefan Rosner, geb. 1979,
studierte Mathematik in
Mannheim und unterrichtet
seit 2005 in der Oberstufe.

Printed in EU
www.freiburger-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das **mündliche Abitur** in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

NEU

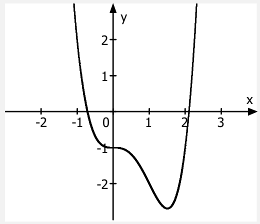
Über **60 Videos** des Autors, in welchen alle Stoffzusammenfassungen nochmals erklärt werden. Zugriff über Kurzadresse oder QR-Code aus dem Buch.

Mindmaps zu Beginn des jeweiligen Kapitels.

Ganzrationale Funktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

(S. 8)

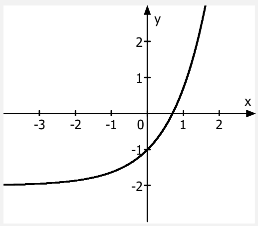


Funktionstypen

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x - 2$

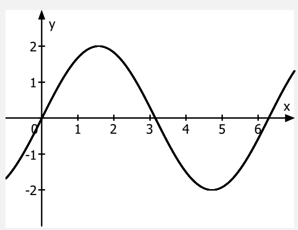
(S. 12)



Trignonometrische Funktion

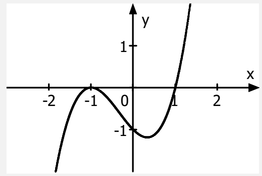
$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

(S. 14)

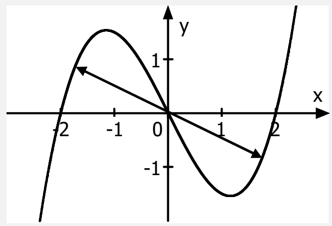


Analysis
Funktionen

Nullstellenansatz
$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$
(S. 10)



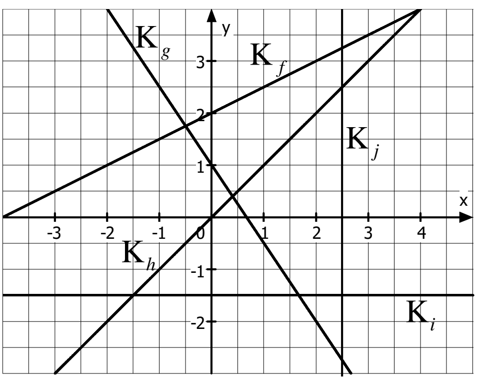
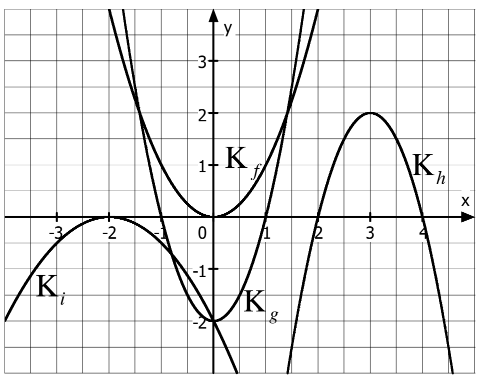
Symmetrie
…zur y-Achse
…zum Ursprung
(S.18)



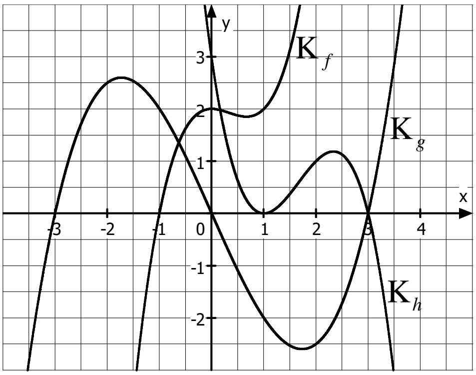
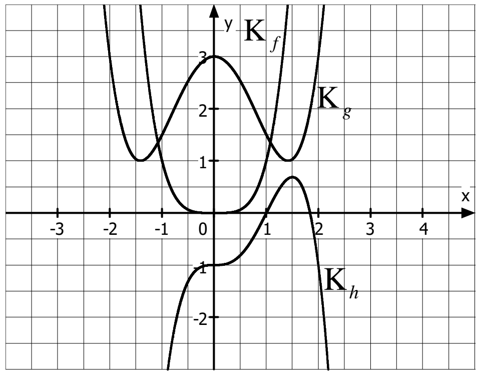
Spiegeln, Strecken und Verschieben
(S.16)

1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

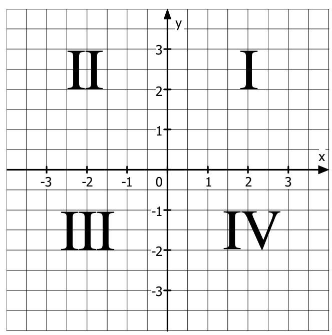
1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
Hauptform: $\boldsymbol{y = mx + b}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
Vorgehen zum Einzeichnen: $y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen-abschnitt}$	Scheitelpunkt-Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$
Steigung aus 2 Punkten: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I
Steigungswinkel aus Steigung bestimmen: $m = \tan(\alpha)$	$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV
Parallele Geraden: $m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)	Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid c)$
Senkrechte (orthogonale) Geraden: Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$	Bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)
1. Winkelhalbierende: $y = x \quad (m = 1)$ 2. Winkelhalbierende: $y = -x \quad (m = -1)$	
	
K_f: $y = \frac{1}{2}x + 2$ K_g: $y = -\frac{3}{2}x + 1$ K_h: $y = x$ (1. Winkelhalbierende) K_i: $y = -1{,}5$ K_j: $x = 2{,}5$	K_f: $f(x) = x^2$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$ K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$ K_i: $i(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

http://frv.tv/5s

3. Grades	**4. Grades**
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$
$a > 0$: Verlauf von III nach I	$a > 0$: Verlauf von II nach I
$a < 0$: Verlauf von II nach IV	$a < 0$: Verlauf von III nach IV
Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid d)$	Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid e)$
Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)	Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)
	
K_f: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ K_g: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$ K_h: $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$	K_f: $f(x) = x^4$ K_g: $g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$ K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

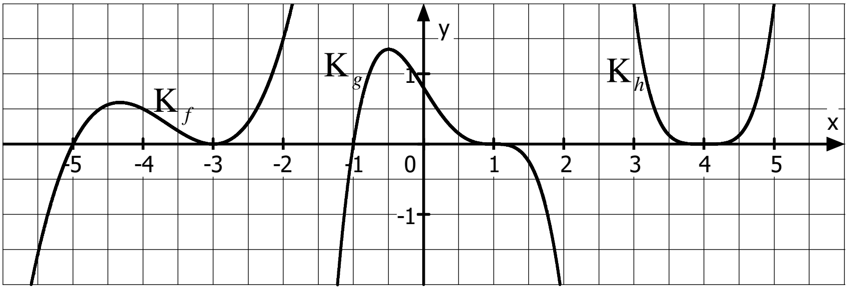
Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)
$\boldsymbol{a > 0}$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)
$\boldsymbol{a < 0}$: Verlauf von ... nach **IV** („endet **unten**“)

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



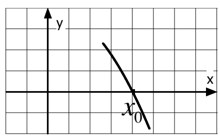
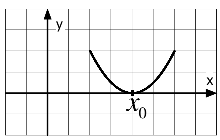
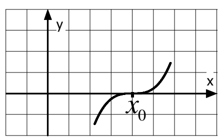
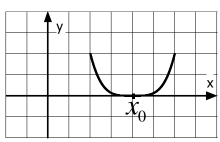
$K_f: f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $\quad K_g: g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $\quad K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

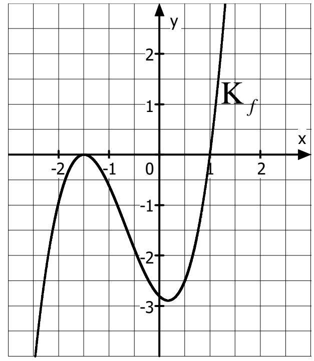
$$g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Faktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

http://frv.tv/5t



Beispiel
Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.

Lösung
Da die Nullstellen $(x_{1/2} = -1{,}5;\ \ x_3 = 1)$ des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:
$f(x) = a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$
Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der *x*-Achse ist, eingesetzt:

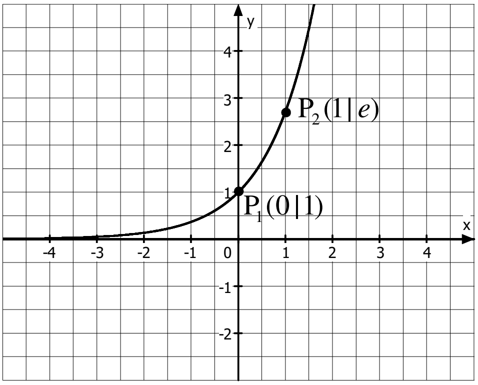
P(0,5 | −2,5):

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1) \\ -2{,}5 &= a \cdot (0{,}5+1{,}5)^2 \cdot (0{,}5-1) \\ -2{,}5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

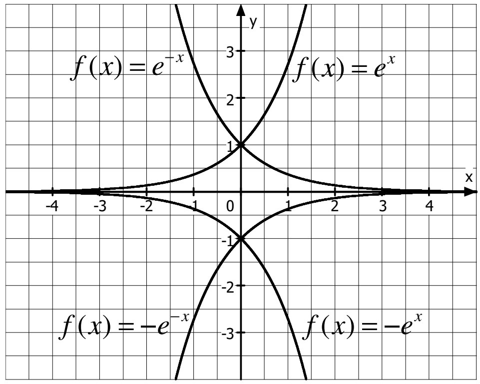
$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$$

1.3 Exponentialfunktionen

1. Verlauf: $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in: $f(x) = a \cdot e^{b\cdot(x-c)} + d$

***a* - Streckung / Stauchung in *y*-Richtung**	$a > 1$:	„steiler“
	$0 < a < 1$:	„flacher“
	($a < 0$:	an der x-Achse gespiegelt)
***b* - ansteigendes oder fallendes Schaubild**	$b > 0$:	ansteigendes Schaubild
	$b < 0$:	fallendes Schaubild (bzw. an der y-Achse gespiegelt)
***c* - Verschiebung in *x*-Richtung**	$c > 0$:	nach rechts
	$c < 0$:	nach links
***d* - Verschiebung in *y*-Richtung**	$d > 0$:	nach oben
($y = d$ ist Asymptote)	$d < 0$:	nach unten

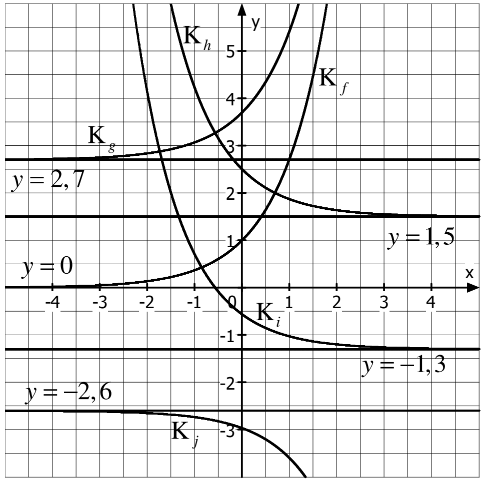
Vorsicht beim Koeffizienten *c*

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!
Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

http://frv.tv/7k

4. **Asymptoten** (Näherungsgeraden)

Beispielfunktion	**Asymptote**	**Schaubilder**
$f(x) = e^x$	$y = 0$ (x – Achse) für $x \to -\infty$	
$g(x) = e^x + 2,7$	$y = 2,7$ für $x \to -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 1,5$	$y = 1,5$ für $x \to +\infty$	
$i(x) = 2e^{-x-1} - 1,3$	$y = -1,3$ für $x \to +\infty$	
$j(x) = -e^{x-1} - 2,6$	$y = -2,6$ für $x \to -\infty$	

Regeln :

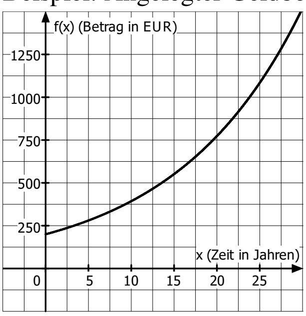
1. Asymptotengleichung : y =„Exponentialgleichung ohne $e^{...x}$“

2. Annäherungsrichtung : Bei $e^{„+x“}$ für $x \to -\infty$ bzw. **bei $e^{„-x“}$ für $x \to +\infty$**

5. Anwendungen

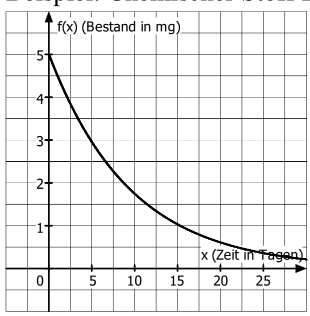
Wachstum mit $f(x) = e^{„+x“}$

Beispiel: Angelegter Geldbetrag vermehrt sich



Zerfall mit $f(x) = e^{„-x“}$

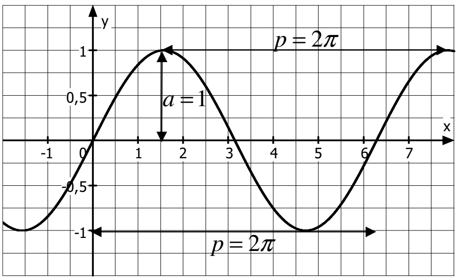
Beispiel: Chemischer Stoff zerfällt



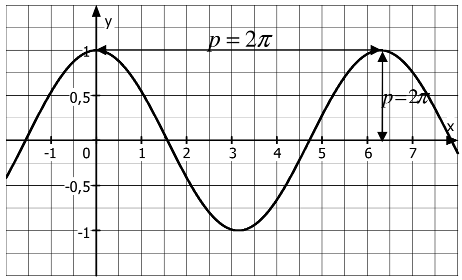
1.4 Trigonometrische Funktionen

1. Verlauf

$f(x) = \sin(x)$



$f(x) = \cos(x)$



2. Koeffizienten: $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$ und $f(x) = a \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d$

***a* - Amplitude**
($|a|$, also „Zahl a ohne Vorzeichen“, gibt max. Abstand zur „Mittellinie“ an)
(Streckung in y-Richtung)

$\left(a < 0: \right.$ an der x-Achse gespiegelt $\left. \right)$ $\quad \left(a = \dfrac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \right)$

***b* - entscheidet Periodenlänge**
(„Dauer eines Durchlaufes“)
$\left(\text{Streckung in } x\text{-Richtung um } \dfrac{1}{b} \right)$

$b = \dfrac{2\pi}{p}$ (p entspricht der Periodenlänge)

***c* - Verschiebung in *x*-Richtung**

$c > 0$: nach rechts
$c < 0$: nach links

***d* - Verschiebung in *y* - Richtung**
(„Höhe der Mittellinie“)

$d > 0$: nach oben
$d < 0$: nach unten

$\left(d = \dfrac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \right)$

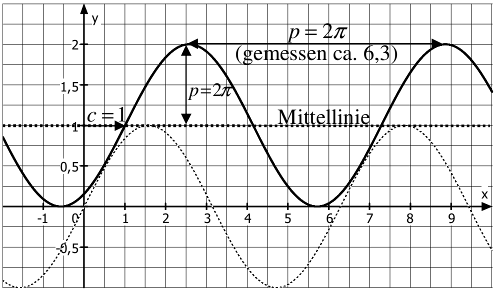
Vorsicht beim Koeffizienten *c*

Das Schaubild zu $f(x) = \sin(x - 3)$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!
Der Koeffizient c hat den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = \sin(x + 2)$: Verschiebung um 2 nach *links*!

http://frv.tv/1e

Beispiel 1 (Zusätzlich ist das Schaubild von $f(x)=\sin(x)$ gestrichelt eingezeichnet.)



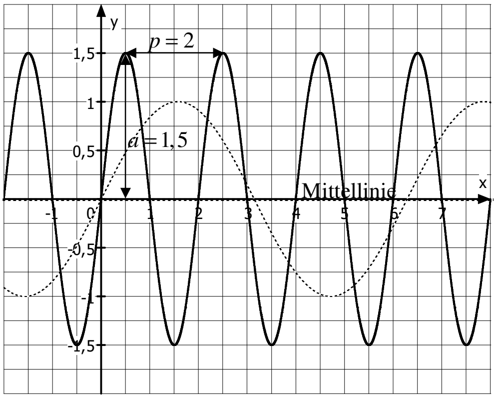
$\Rightarrow f(x)=\sin(x-1)+1$

$\left(\text{Alternativ: } f(x)=\cos(x-2{,}57)+1\right)$

Mit $\boldsymbol{f(x)=a\cdot \sin\big(b\cdot(x-c)\big)+d}$ **:**

- $d=1$ Mittellinie auf Höhe $+1$ $\left(\text{oder mit } \frac{2+0}{2}=\frac{2}{2}=1\right)$
- $a=1$ (max. Abstand von 1 zur Mittellinie) $\left(\text{oder mit } \frac{2-0}{2}=\frac{2}{2}=1\right)$
- $c=1$ Verschiebung um 1 nach rechts
- $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$

Beispiel 2



$\Rightarrow f(x)=1{,}5\cdot\sin(\pi\cdot x)$

$\left(\text{Alternativ: } f(x)=1{,}5\cdot\cos\big(\pi\cdot(x-0{,}5)\big)\right)$

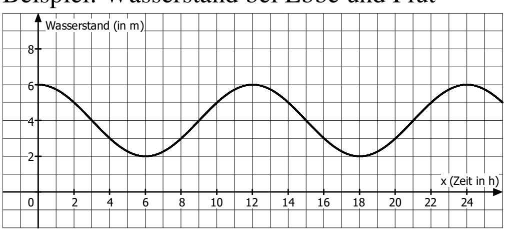
Mit $\boldsymbol{f(x)=a\cdot \sin\big(b\cdot(x-c)\big)+d}$ **:**

- $d=0$ Mittellinie auf Höhe 0 $\left(\text{oder mit } \frac{1{,}5+(-1{,}5)}{2}=\frac{0}{2}=0\right)$
- $a=1{,}5$ max. Abstand von 1,5 zur Mittellinie $\left(\text{oder mit } \frac{1{,}5-(-1{,}5)}{2}=\frac{3}{2}\right)$
- $c=0$ keine Verschiebung bei sin
- $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

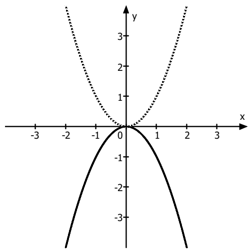
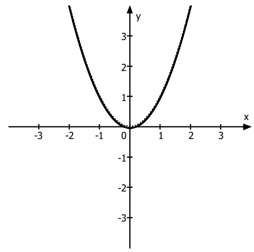
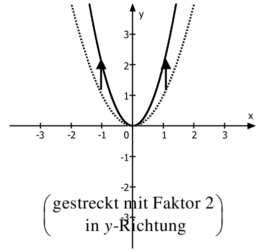
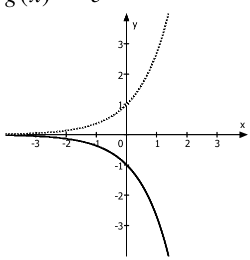
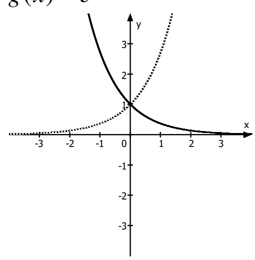
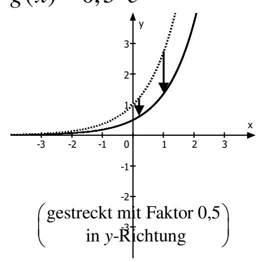
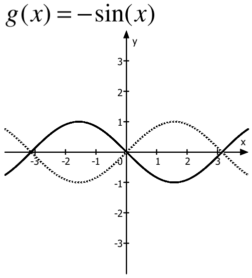
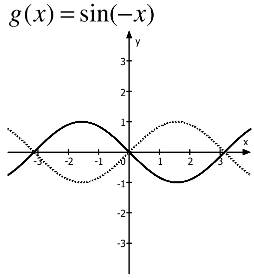
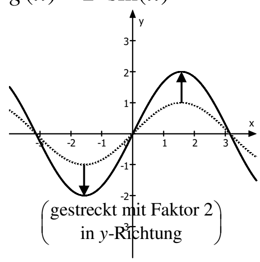
3. Anwendungen

Periodische Vorgänge, also Vorgänge, die sich in gleichen Zeitabschnitten wiederholen, werden oft mit trigonometrischen Funktionen modelliert.

Beispiel: Wasserstand bei Ebbe und Flut

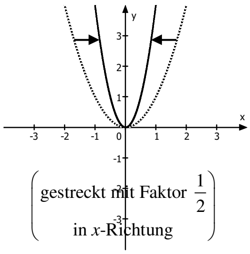
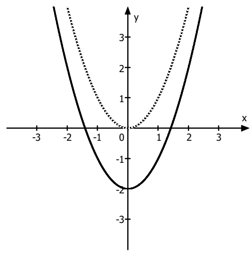
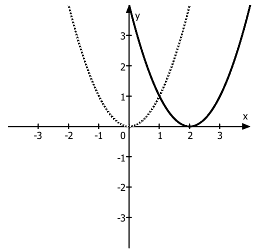
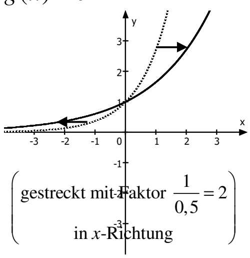
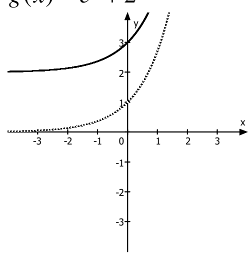
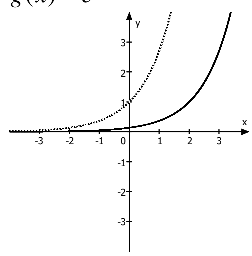
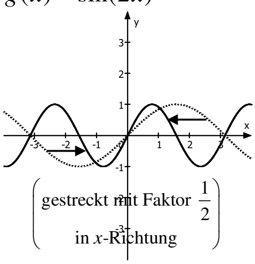
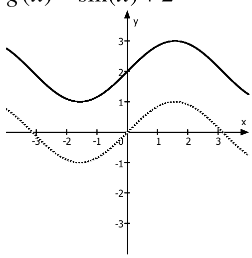
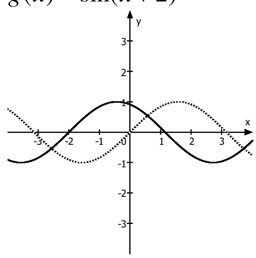


1.5 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben $\qquad f(x) \quad \rightarrow$

	Spiegeln an ...		**Strec -**
	... x - Achse	**... y - Achse**	**... y - Richtung**
$f(x)=x^2$	$g(x)=-x^2$ 	$g(x)=(-x)^2=x^2$ 	$g(x)=2\cdot x^2$ 
$f(x)=e^x$	$g(x)=-e^x$ 	$g(x)=e^{-x}$ 	$g(x)=0,5\cdot e^x$ 
$f(x)=\sin(x)$	$g(x)=-\sin(x)$ 	$g(x)=\sin(-x)$ 	$g(x)=2\cdot\sin(x)$ 
	$\mathrm{g}(x)=-f(x)$ „ – “ vor Funktionsterm	$\mathrm{g}(x)=f(-x)$ „x“ durch „ – x“ ersetzt	$\mathrm{g}(x)=\boldsymbol{a}\cdot f(x)$ Streckung mit Faktor $\lvert\boldsymbol{a}\rvert$ in y-Richtung

http://frv.tv/1f

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x - c)\big) + d}$$

ken in ...	**Verschieben in ...**	
... *x* - Richtung	**... *y* - Richtung**	**... *x* - Richtung**
$g(x) = (2x)^2 = 4x^2$  $\left(\begin{array}{c}\text{gestreckt mit Faktor } \frac{1}{2} \\ \text{in } x\text{-Richtung}\end{array}\right)$	$g(x) = x^2 - 2$ 	$g(x) = (x-2)^2$ 
$g(x) = e^{0,5x}$  $\left(\begin{array}{c}\text{gestreckt mit Faktor } \frac{1}{0,5} = 2 \\ \text{in } x\text{-Richtung}\end{array}\right)$	$g(x) = e^x + 2$ 	$g(x) = e^{x-2}$ 
$g(x) = \sin(2x)$  $\left(\begin{array}{c}\text{gestreckt mit Faktor } \frac{1}{2} \\ \text{in } x\text{-Richtung}\end{array}\right)$	$g(x) = \sin(x) + 2$ 	$g(x) = \sin(x+2)$ 
$\mathrm{g}(x) = f(\boldsymbol{b} \cdot x)$ Streckung mit Faktor $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lvert b \rvert}}$ in x-Richtung	$\mathrm{g}(x) = f(x) \pm \boldsymbol{d}$ z.B. $... + 2:$ Versch. nach oben $... - 2:$ Versch. nach unten	$\mathrm{g}(x) = f(x \pm \boldsymbol{c})$ z.B. $(x-2):$ V. nach rechts $(x+2):$ V. nach links

1.6 Symmetrie zur y-Achse bzw. zum Ursprung

Bei **ganzrationalen Funktionen** kann anhand der **Hochzahlen** (nur **gerade** bzw. **ungerade** Hochzahlen oder gemischt) entschieden werden, ob ein gegebenes Schaubild symmetrisch zur y-Achse bzw. zum Ursprung ist, oder ob keine dieser beiden Symmetriearten vorliegt.

Bei **anderen Funktionstypen** müssen hingegen die **allgemeinen Bedingungen** zur Symmetrieuntersuchung verwendet werden.

1. Allgemeine Bedingung für Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$

Bedingung in Worten

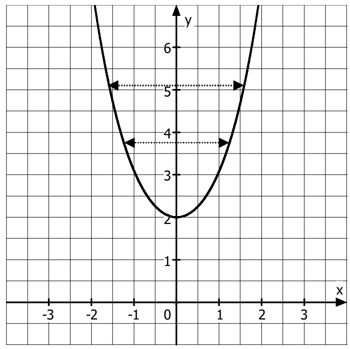
An den Stellen x und $-x$ sind die y-Werte gleich groß.

Beispiel

Ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{-x} + e^{x}$ achsensymmetrisch zur y-Achse?

$$\left.\begin{aligned} f(-x) &= e^{-(-x)} + e^{-x} = \underline{e^{x} + e^{-x}} \\ f(x) &= \underline{e^{-x} + e^{x}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Es gilt:} \\ &f(-x) = f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Somit symmetrisch zur y-Achse!



2. Allgemeine Bedingung für Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$

Bedingung in Worten

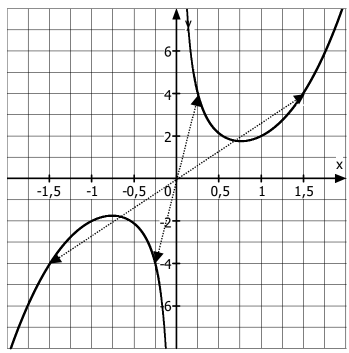
An den Stellen x und $-x$ haben die y-Werte den gleichen „Zahlenwert", jedoch mit verschiedenen Vorzeichen. Mit dem Minuszeichen vor $f(x)$ sind die Werte gleich.

Beispiel

Ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ punktsymmetrisch zum Ursprung?

$$\left.\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + \frac{1}{-x} = \underline{-x^3 - \frac{1}{x}} \\ -f(x) &= -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) = \underline{-x^3 - \frac{1}{x}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Es gilt:} \\ &f(-x) = -f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Somit punktsymmetrisch zum Ursprung!



http://frv.tv/1h

1.7 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze

Aufgabenstellung	**Rechenansatz**	
y-Wert bei $x = 2$?	$\boldsymbol{f(2)} = ...$	(x *- Wert einsetzen, ausrechnen*)
Schnittpunkt mit y-Achse?	$\boldsymbol{f(0)} = ...$	(*0 für x einsetzen, ausrechnen*)
x-Wert bei $y = 5$?	$\boldsymbol{f(x) = 5}$	($f(x)$ *gleich* y *- Wert setzen, Gleichung lös.*)
Schnittpunkt mit x-Achse?	$\boldsymbol{f(x) = 0}$	($f(x)$ *gleich 0 setzen, Gleichung lösen*)
Liegt $P(2\|3)$ auf K_f?	$\boldsymbol{f(2) = 3}$	(Punktprobe: x *- und* y *- Wert einsetzen*)
Schnittpunkt von K_f mit K_g?	$\boldsymbol{f(x) = g(x)}$	(*gleichsetzen, Gleichung lösen*)