

Rosner

# Mathe gut erklärt Abitur 2024

Baden-Württemberg  
Leistungsfach Mathematik  
Allgemeinbildende Gymnasien

10. Auflage





Stefan Rosner, geb. 1979,  
studierte Mathematik in  
Mannheim und unterrichtet  
seit 2005 in der Oberstufe.

## Inhaltsverzeichnis

<b>I. Grundlagen Analysis</b> . . . . .	8
<b>1 Funktionen (Mindmap)</b> . . . . .	8
1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	10
1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen . . . . .	12
1.3 Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	14
1.4 Exponentialfunktionen . . . . .	16
1.5 Trigonometrische Funktionen . . . . .	18
1.6 Wurzelfunktion . . . . .	20
1.7 Natürliche Logarithmusfunktion . . . . .	20
1.8 Umkehrfunktion . . . . .	21
1.9 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben . . . . .	22
1.10 Funktionenscharen . . . . .	24
1.11 Symmetrie zur $y$ -Achse bzw. zum Ursprung . . . . .	26
1.12 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze . . . . .	27
<b>2 Gleichungen (Mindmap)</b> . . . . .	28
2.1 Gleichungstypen: Übersicht . . . . .	30
2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen . . . . .	32
2.3 Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen . . . . .	40
2.4 Ungleichungen . . . . .	42
2.5 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	44
<b>3 Differenzialrechnung (Mindmap)</b> . . . . .	46
3.1 Ableitungsregeln . . . . .	48
3.2 Tangente und Normale . . . . .	51
3.3 Schnittpunkte (Berührungspunkt, senkrechter Schnitt, Schnittwinkel) . . . . .	54
3.4 Monotonie . . . . .	56
3.5 Krümmung . . . . .	57
3.6 Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte) . . . . .	58
3.7 Wendepunkte . . . . .	59
3.8 Sattelpunkte . . . . .	60
3.9 Ortskurve (Zusatz) . . . . .	64
3.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung . . . . .	66
3.11 Ermittlung von Funktionsgleichungen . . . . .	68
3.12 Extremwertaufgaben . . . . .	72
3.13 Wachstum und Zerfall . . . . .	74
<b>4 Integralrechnung (Mindmap)</b> . . . . .	76
4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“) . . . . .	78
4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und $x$ -Achse . . . . .	82
4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern . . . . .	84

4.4	Mittelwert (durchschnittlicher $y$ -Wert) einer Funktion . . . . .	88
4.5	Flächen, die bis ins Unendliche reichen (Uneigentliche Integrale) . . . . .	90
4.6	Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen Schaubild und $x$ -Achse rotiert um die $x$ -Achse . . . . .	92
4.7	Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen zwei Schaubildern rotiert um die $x$ -Achse . . . . .	93
4.8	Zusatz: Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben . . . . .	94
<b>II.</b>	<b>Grundlagen Vektorgeometrie (Mindmap)</b> . . . . .	<b>98</b>
<b>1</b>	<b>Vorwissen</b> . . . . .	<b>100</b>
1.1	Punkte (im $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	100
1.2	Vektoren (im $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	100
1.3	Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, Betrag, Skalare Multiplikation, Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Skalarprodukt, Vektorprodukt) . . . . .	101
<b>2</b>	<b>Geraden</b> . . . . .	<b>104</b>
2.1	Geradengleichungen in Parameterform . . . . .	104
2.2	Gegenseitige Lage von Geraden . . . . .	106
<b>3</b>	<b>Ebenen</b> . . . . .	<b>108</b>
3.1	Ebenengleichungen in Parameterform . . . . .	108
3.2	Ebenengleichungen in Normalenform . . . . .	110
3.3	Ebenengleichungen in Koordinatenform . . . . .	112
3.4	Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem . . . . .	114
3.5	Umwandlungen der Ebenenformen . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Gegenseitige Lage</b> . . . . .	<b>120</b>
4.1	Ebene-Gerade . . . . .	120
4.2	Ebene-Ebene . . . . .	122
<b>5</b>	<b>Schnittwinkel</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>6</b>	<b>Abstandsberechnungen</b> . . . . .	<b>126</b>
6.1	Abstände zu einem Punkt . . . . .	127
6.2	Abstände zu einer Geraden . . . . .	130
6.3	Abstände zu einer Ebene . . . . .	132
<b>7</b>	<b>Zusatz: Bewegungsaufgaben (Modellieren mit Vektoren)</b> . . . . .	<b>134</b>
<b>8</b>	<b>Spiegelungen</b> . . . . .	<b>136</b>
<b>9</b>	<b>Das Vektorprodukt zur Flächen- und Volumenberechnung</b> . . . . .	<b>138</b>
<b>III.</b>	<b>Grundlagen Stochastik (Mindmap)</b> . . . . .	<b>140</b>
<b>1</b>	<b>Baumdiagramm, Pfadregeln und Erwartungswert</b> . . . . .	<b>142</b>
1.1	Einführung . . . . .	142

1.2	Aufgabentypen . . . . .	145
1.3	Zufallsgröße, Erwartungswert und Standardabweichung . . . . .	148
<b>2</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel . . . . .</b>	<b>152</b>
2.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	152
2.2	Unabhängigkeit . . . . .	154
2.3	Vierfeldertafel . . . . .	155
2.4	Zusammenhänge und Vernetzung . . . . .	156
<b>3</b>	<b>Kombinatorik . . . . .</b>	<b>162</b>
3.1	Übersicht: Berechnung von Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten . . . . .	162
3.2	Beispielaufgaben . . . . .	164
<b>4</b>	<b>Binomialverteilung . . . . .</b>	<b>166</b>
4.1	Bernoulliformel . . . . .	166
4.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung . . . . .	168
4.3	Aufgabentypen . . . . .	170
4.4	Erwartungswert und Standardabweichung . . . . .	177
<b>5</b>	<b>Der einseitige Hypothesentest . . . . .</b>	<b>178</b>
5.1	Ausführliche Erklärung . . . . .	178
5.2	Vorgehen und Beispiele . . . . .	179
5.3	Fehler 1. Art und 2. Art . . . . .	182
5.4	Zweiseitiger Hypothesentest . . . . .	186
<b>6</b>	<b>Normalverteilung . . . . .</b>	<b>188</b>
6.1	Unterschied zur Binomialverteilung . . . . .	188
6.2	Normalverteilung und Gaußsche Glockenkurve . . . . .	188
6.3	Aufgabentypen . . . . .	190

## **Vorwort**

### **Liebe Schülerinnen und Schüler,**

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- die Abitursaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

### **Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,**

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

## **NEU**

**Mindmaps** zu Beginn des jeweiligen Kapitels.

**Liebe Schülerinnen und Schüler,**

über Fragen oder Anregungen zu den Inhalten dieses Buches freue ich mich sehr.

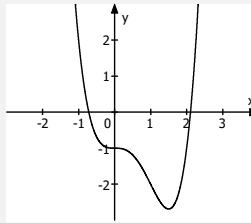
*Stefan Rosner*

([stefan\\_rosner@hotmail.com](mailto:stefan_rosner@hotmail.com))

Ganzrationale  
Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$$

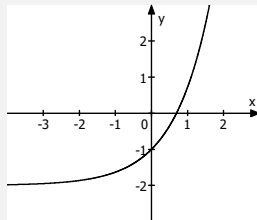
(S. 10)



Gebrochenrationale  
Funktion

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

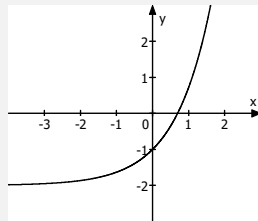
(S. 14)



Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x - 2$$

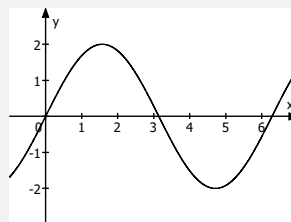
(S. 16)



Trigonometrische  
Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$$

(S. 18)



Funktionstypen

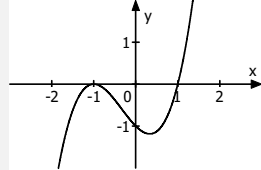


# Analysis Funktionen

Nullstellenansatz

$$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$$

(S. 12)

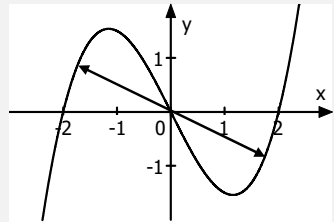


Symmetrie

...zur y-Achse

...zum Ursprung

(S. 26)



Spiegeln, Strecken  
und Verschieben

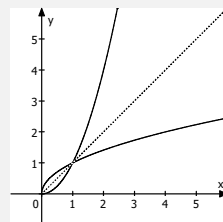
(S. 22)

Umkehrfunktion

$$f(x) = x^2$$

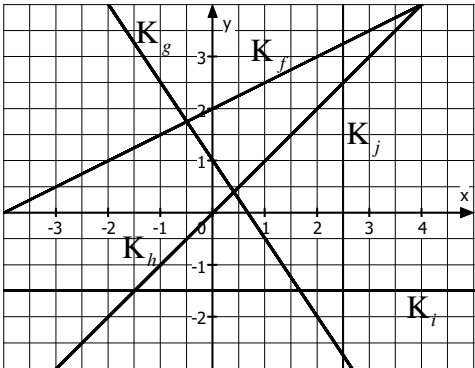
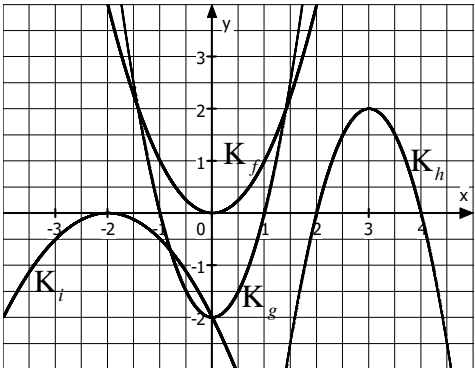
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

(S. 21)

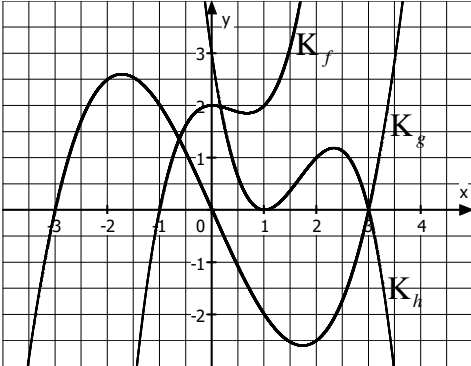
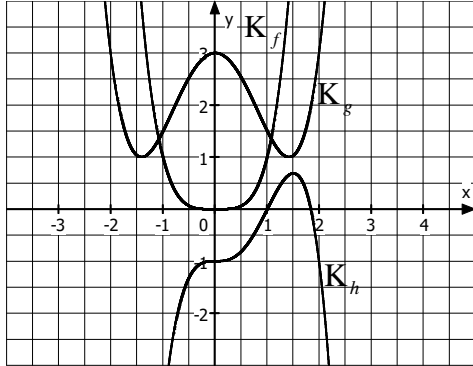


# 1. Funktionen

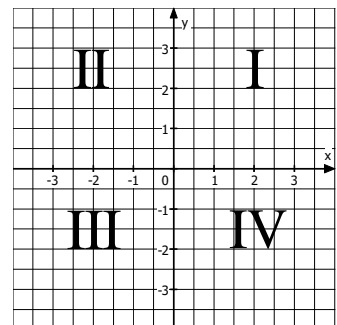
## 1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
<p><b>Hauptform : <math>y = mx + b</math></b></p> <p>Vorgehen zum Einzeichnen:  <math>y = \frac{\text{hoch / runter}}{\text{rechts}} \cdot x + \text{y-Achsen- abschnitt}</math></p> <p>Steigung aus 2 Punkten: <math>m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}</math></p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen:  <math>m = \tan(\alpha)</math></p> <p>Parallele Geraden:  <math>m_1 = m_2</math> (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden:                      Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: <math>m_2 = -\frac{1}{m_1}</math> bzw. <math>m_1 \cdot m_2 = -1</math></p> <p>1. Winkelhalbierende: <math>y = x</math> (<math>m = 1</math>)                      2. Winkelhalbierende: <math>y = -x</math> (<math>m = -1</math>)</p>  <p> <math>K_f: y = \frac{1}{2}x + 2</math>     <math>K_g: y = -\frac{3}{2}x + 1</math>  <math>K_h: y = x</math> (1. Winkelhalbierende)  <math>K_i: y = -1,5</math>     <math>K_j: x = 2,5</math> </p>	<p><b>Allg.: <math>f(x) = ax^2 + bx + c</math></b></p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz:  <math>f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s</math> mit <math>S(x_s   y_s)</math></p> <p><math>a &gt; 0</math>: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p><math>a &lt; 0</math>: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: <math>S_y(0   c)</math></p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse:  <math>f(x) = ax^2 + c</math> (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p> <math>K_f: f(x) = x^2</math>     <math>K_g: g(x) = 2x^2 - 2</math>  <math>K_h: h(x) = -2(x - 3)^2 + 2</math>  <math>K_i: i(x) = -0,5x^2 - 2x - 2</math> </p>



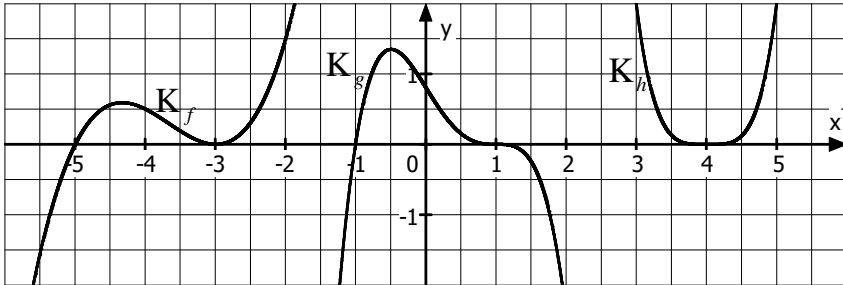
3. Grades	4. Grades
<p><b>Allg.: <math>f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d</math></b></p> <p><math>a &gt; 0</math>: Verlauf von III nach I</p> <p><math>a &lt; 0</math>: Verlauf von II nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: <math>S_y(0 d)</math></p> <p>Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung:  <math>f(x) = ax^3 + cx</math> (nur ungerade Hochzahlen)</p>  <p><math>K_f: f(x) = x^3 - x^2 + 2</math></p> <p><math>K_g: g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x</math></p> <p><math>K_h: h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3</math></p>	<p><b>Allg.: <math>f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e</math></b></p> <p><math>a &gt; 0</math>: Verlauf von II nach I</p> <p><math>a &lt; 0</math>: Verlauf von III nach IV</p> <p>Schnittpunkt mit y-Achse: <math>S_y(0 e)</math></p> <p>Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse:  <math>f(x) = ax^4 + cx^2 + e</math> (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p><math>K_f: f(x) = x^4</math></p> <p><math>K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3</math></p> <p><math>K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1</math></p>

**Die Quadranten**



## 1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

### Beispiele



$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$      $K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$      $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

### Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$$

Verlauf von III nach IV       $x_0 = -1$  ist einfache Nullstelle       $x_{1/2/3} = +1$  ist dreifache Nullstelle

### Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Faktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
<b>Einfache</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild <b>schneidet</b> x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
<b>Doppelte</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild <b>berührt</b> x-Achse (ohne VZW)
<b>Dreifache</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild <b>schneidet</b> und <b>berührt</b> x-Achse (mit VZW)
<b>Vierfache</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$		Schaubild <b>berührt</b> x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)



**Beispiel**

Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.

**Lösung**

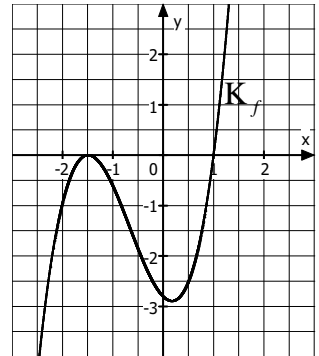
Da die Nullstellen ( $x_{1/2} = -1,5$ ;  $x_3 = 1$ ) des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:

$$f(x) = a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$

Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse ist, eingesetzt:

$$\begin{aligned} P(0,5 | -2,5): \quad f(x) &= a \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1) \\ -2,5 &= a \cdot (0,5 + 1,5)^2 \cdot (0,5 - 1) \\ -2,5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x + 1,5)^2 \cdot (x - 1)$$



### 1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg.  $f(x) = \frac{\text{(ganzrationale) Funktion}}{\text{(ganzrationale) Funktion}}$       Beispiel:  $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{x + 2}$  (mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ )

#### 1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

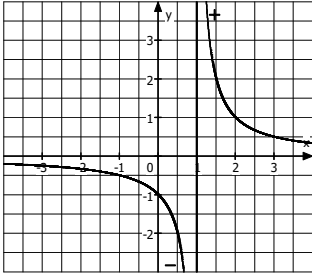
$x$ -Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche  $x$ -Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.

An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.

(Hinweis: Asymptote = Näherungsgerade)

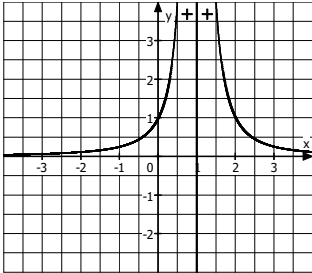
**Fall 1 : Polstelle mit Vorzeichenwechsel (einfache Nullstelle des Nenners)**

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  (mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ )  
 Senkrechte Asymptote:  $x = 1$   
 Für  $x \rightarrow 1$  ( $x < 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow -\infty$   
 Für  $x \rightarrow 1$  ( $x > 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow +\infty$



**Fall 2 : Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (doppelte Nullstelle des Nenners)**

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  (mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ )  
 Senkrechte Asymptote:  $x = 1$   
 Für  $x \rightarrow 1$  ( $x < 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow +\infty$   
 Für  $x \rightarrow 1$  ( $x > 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow +\infty$



#### Hinweise

- $x$ -Werte, für die der **Nenner** gleich **0** ist sind **Definitionslücken**  $\left(\frac{\dots}{0} = ?\right)$
- $x$ -Werte, für die der **Zähler** gleich **0** ist sind **Nullstellen**  $\left(\frac{0}{\dots} = 0\right)$

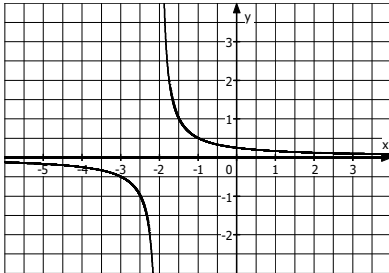


**2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ )**

**Fall 1: Zählergrad < Nennergrad :  $x$ -Achse ist waagrechte Asymptote**

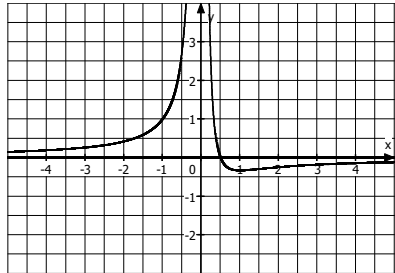
$$f(x) = \frac{1}{2x+4} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 0} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote:  $y = 0$  ( $x$ -Achse)



$$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

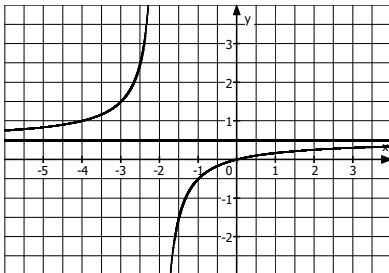
waagrechte Asymptote:  $y = 0$  ( $x$ -Achse)



**Fall 2: Zählergrad = Nennergrad : Waagrechte Asymptote, jedoch nicht  $x$ -Achse**

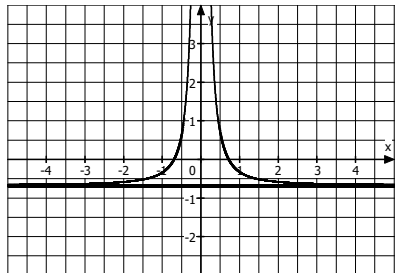
$$f(x) = \frac{1x}{2x+4} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote:  $y = \frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{-2x^2+1}{3x^2} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 2} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote:  $y = -\frac{2}{3}$

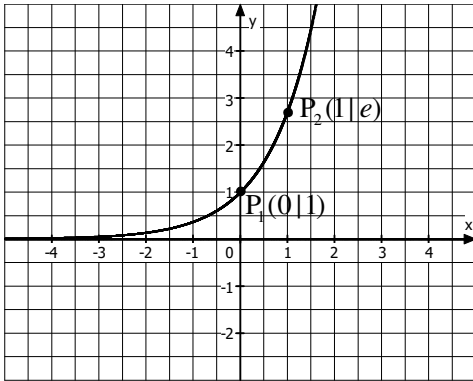


**Fall 3: Zählergrad > Nennergrad: Keine waagrechte Asymptote.**

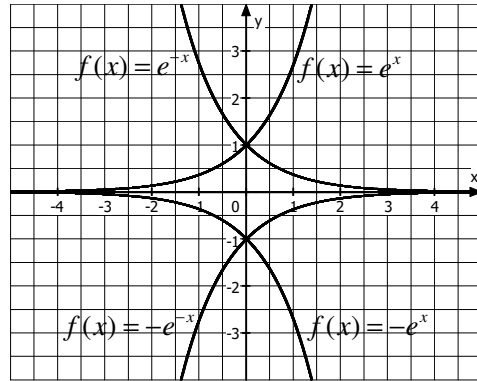
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

## 1.4 Exponentialfunktionen

### 1. Verlauf : $f(x) = e^x$



### 2. Spiegelungen



### 3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

**a - Streckung / Stauchung in y-Richtung**

$a > 1$ : „steiler“

$0 < a < 1$ : „flacher“

( $a < 0$ : an der x-Achse gespiegelt)

**b - ansteigendes oder fallendes Schaubild**

$b > 0$ : ansteigendes Schaubild

$b < 0$ : fallendes Schaubild

(bzw. an der y-Achse gespiegelt)

**c - Verschiebung in x-Richtung**

$c > 0$ : nach rechts

$c < 0$ : nach links

**d - Verschiebung in y-Richtung**

( $y = d$  ist Asymptote)

$d > 0$ : nach oben

$d < 0$ : nach unten

#### Vorsicht beim Koeffizienten c

Das Schaubild zu  $f(x) = e^{x-3}$  wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat hier den Wert +3, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend  $f(x) = e^{x+2}$ : Verschiebung um 2 nach *links*!





### 4. Asymptoten (Naherungsgeraden)

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x) = e^x$	$y = 0$ ( $x$ -Achse) fur $x \rightarrow -\infty$	
$g(x) = e^x + 2,7$	$y = 2,7$ fur $x \rightarrow -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 1,5$	$y = 1,5$ fur $x \rightarrow +\infty$	
$i(x) = 2e^{-x-1} - 1,3$	$y = -1,3$ fur $x \rightarrow +\infty$	
$j(x) = -e^{-x} - 2,6$	$y = -2,6$ fur $x \rightarrow +\infty$	

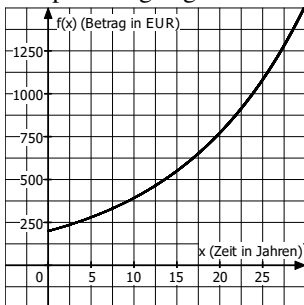
**Regeln :**

1. Asymptotengleichung :  $y =$  „Exponentialgleichung ohne  $e^{\dots x}$ “
2. Annaherungsrichtung : Bei  $e^{+x}$  fur  $x \rightarrow -\infty$  bzw. bei  $e^{-x}$  fur  $x \rightarrow +\infty$

### 5. Anwendungen

**Wachstum** mit  $f(x) = e^{+x}$

Beispiel: Angelegter Geldbetrag vermehrt sich



**Zerfall** mit  $f(x) = e^{-x}$

Beispiel: Chemischer Stoff zerfallt

