Rosner

Mathe gut erklärt
Abitur 2024

Baden-Württemberg
Leistungsfach Mathematik
Allgemeinbildende Gymnasien

10. Auflage

Freiburger Verlag

Stefan Rosner, geb. 1979,
studierte Mathematik in
Mannheim und unterrichtet
seit 2005 in der Oberstufe.

Printed in EU
www.freiburger-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- die Abitursaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch und die Videos sollen Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

NEU

Mindmaps zu Beginn des jeweiligen Kapitels.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

über Fragen oder Anregungen zu den Inhalten dieses Buches freue ich mich sehr.

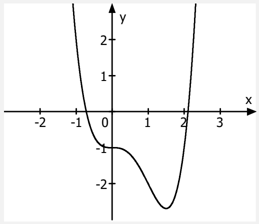
Stefan Rosner

(stefan_rosner@hotmail.com)

Ganzrationale Funktion

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

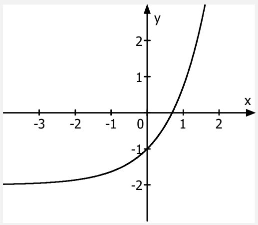
(S. 10)



Gebrochenrationale Funktion

$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

(S. 14)

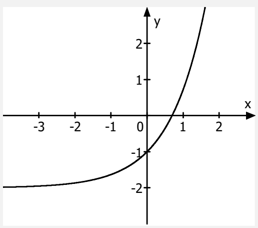


Funktionstypen

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x - 2$

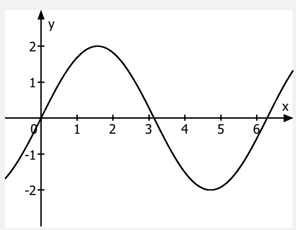
(S. 16)



Trignonometrische Funktion

$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

(S. 18)

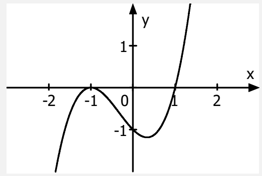


Analysis
Funktionen

Nullstellenansatz

$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$

(S. 12)

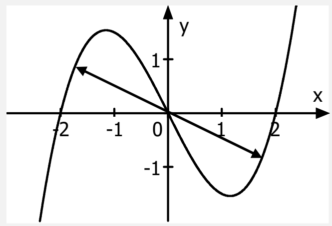


Symmetrie

…zur y-Achse

…zum Ursprung

(S. 26)



Spiegeln, Strecken und Verschieben

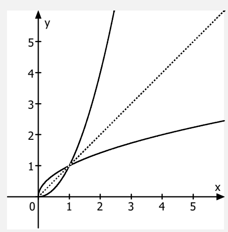
(S. 22)

Umkehrfunktion

$f(x) = x^2$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(S. 21)



1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)

Hauptform : $\boldsymbol{y = mx + b}$

Vorgehen zum Einzeichnen:

$$y = \frac{\textit{hoch / runter}}{\textit{rechts}} \cdot x + \begin{array}{l}\textit{y-Achsen-}\\ \textit{abschnitt}\end{array}$$

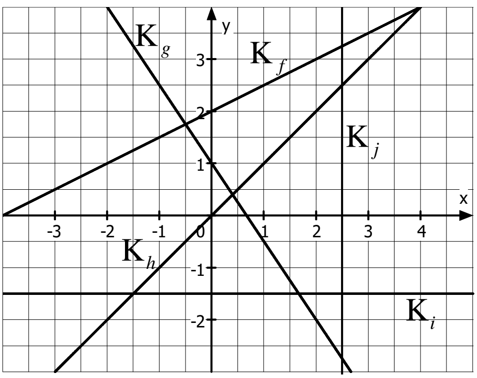
Steigung aus 2 Punkten: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Steigungswinkel aus Steigung bestimmen:
$m = \tan(\alpha)$

Parallele Geraden:
$m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)

Senkrechte (orthogonale) Geraden:
Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$

1. Winkelhalbierende: $y = x \quad (m = 1)$
2. Winkelhalbierende: $y = -x \quad (m = -1)$



K_f: $y = \frac{1}{2}x + 2$ $\qquad$ K_g: $y = -\frac{3}{2}x + 1$

K_h: $y = x$ (1. Winkelhalbierende)

K_i: $y = -1{,}5$ $\qquad$ K_j: $x = 2{,}5$

2. Grades (Parabeln)

Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

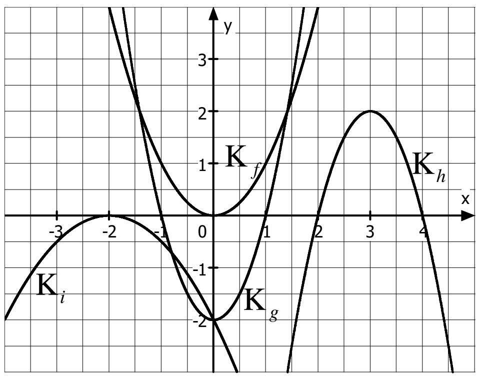
Scheitelpunkt-Ansatz:
$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$

$a > 0$: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I

$a < 0$: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV

Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid c)$

Bei Symmetrie zur y-Achse:
$f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)

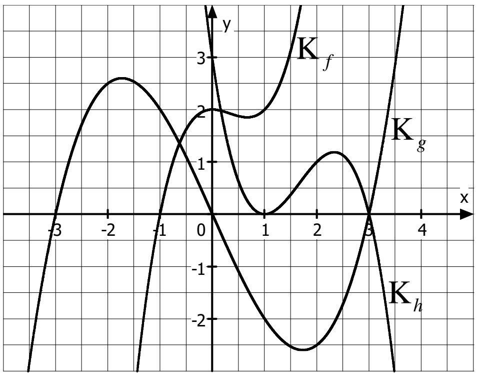
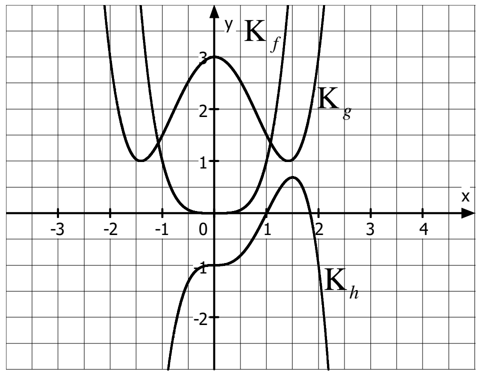


K_f: $f(x) = x^2$ $\qquad$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$

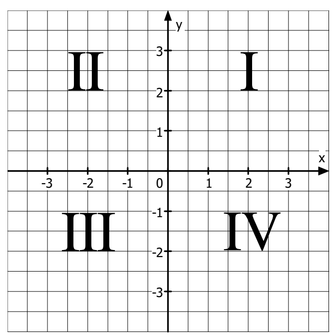
K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$

K_i: $i(x) = -0{,}5x^2 - 2x - 2$

http://frv.tv/5s

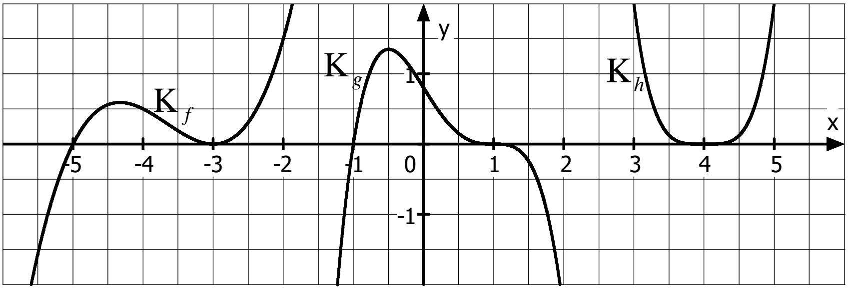
3. Grades	**4. Grades**
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$ $a > 0$: Verlauf von III nach I $a < 0$: Verlauf von II nach IV Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid d)$ Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)  K_f: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ K_g: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$ K_h: $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$ $a > 0$: Verlauf von II nach I $a < 0$: Verlauf von III nach IV Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0 \mid e)$ Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)  K_f: $f(x) = x^4$ K_g: $g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$ K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

Die Quadranten



1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



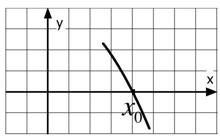
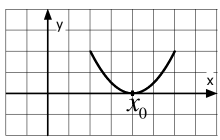
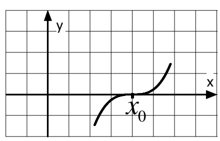
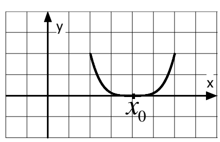
$K_f: f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $K_g: g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

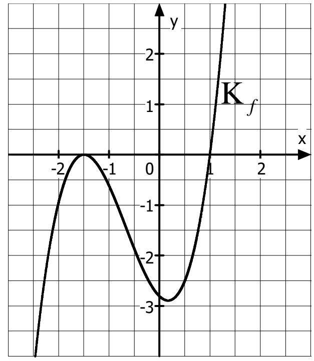
$$g(x) = -0{,}8 \cdot \left(x+1\right) \cdot \left(x-1\right)^3$$

Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	**Faktor im Nullstellenansatz**	**Skizze**	**Beschreibung**
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

Beispiel
Gesucht ist der Funktionsterm zum nebenstehenden Schaubild.



Lösung
Da die Nullstellen $(x_{1/2} = -1{,}5;\ \ x_3 = 1)$ des Schaubildes ablesbar sind, kann der Nullstellenansatz der Funktion weitgehend aufgestellt werden:
$f(x) = a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$
Dann werden die Koordinaten eines weiteren Punktes, der kein Schnittpunkt mit der *x*-Achse ist, eingesetzt:
P$(0{,}5\,|\,-2{,}5)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1) \\ -2{,}5 &= a \cdot (0{,}5+1{,}5)^2 \cdot (0{,}5-1) \\ -2{,}5 &= -2a \\ \frac{5}{4} &= a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$$

1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg. $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\textit{(ganzrationale) Funktion}}{\textit{(ganzrationale) Funktion}}}$ Beispiel: $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{x+2}$ $\left(\text{mit } D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}\right)$

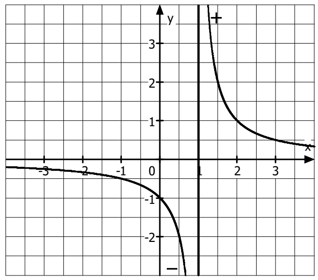
1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

x-Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche x-Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.
An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.
(Hinweis: Asymptote = Näherungsgerade)

Fall 1 : Polstelle mit Vorzeichenwechel (einfache Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\left(\text{mit } D=\mathbb{R}\setminus\{1\}\right)$
Senkrechte Asymptote: $\boldsymbol{x=1}$

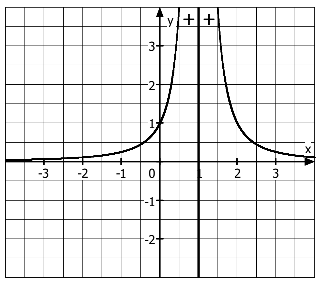
Für $x\to 1\ (x<1)$ gilt: $f(x)\to -\infty$
Für $x\to 1\ (x>1)$ gilt: $f(x)\to +\infty$



Fall 2 : Polstelle ohne Vorzeichenwechel (doppelte Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\left(\text{mit } D=\mathbb{R}\setminus\{1\}\right)$
Senkrechte Asymptote: $\boldsymbol{x=1}$

Für $x\to 1\ (x<1)$ gilt: $f(x)\to +\infty$
Für $x\to 1\ (x>1)$ gilt: $f(x)\to +\infty$



Hinweise

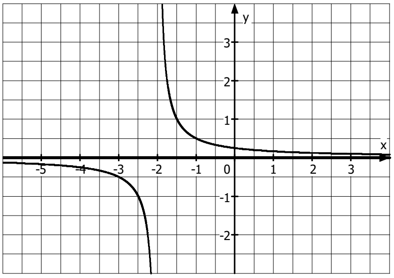
- x-Werte, für die der **Nenner** gleich **0** ist sind **Definitionslücken** $\left(\dfrac{\ldots}{0}=?\right)$
- x-Werte, für die der **Zähler** gleich **0** ist sind **Nullstellen** $\left(\dfrac{0}{\ldots}=0\right)$

2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \to \pm\infty$)

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad: x - Achse ist waagrechte **Asymptote**

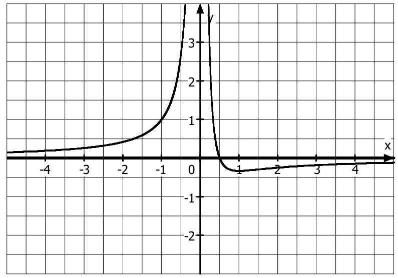
$f(x) = \frac{1}{2x+4}$ $\left(\frac{\text{Grad } 0}{\text{Grad } 1}\right)$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)



$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2}$ $\left(\frac{\text{Grad } 1}{\text{Grad } 2}\right)$

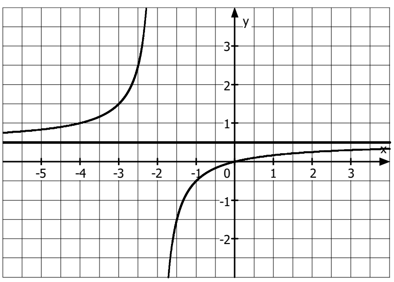
waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)



Fall 2: Zählergrad = Nennergrad: Waagrechte Asymptote, jedoch nicht x-Achse

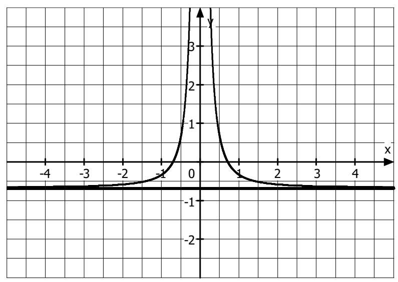
$f(x) = \frac{\mathbf{1}x}{\mathbf{2}x+4}$ $\left(\frac{\text{Grad } 1}{\text{Grad } 1}\right)$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$



$f(x) = \frac{\mathbf{-2}x^2+1}{\mathbf{3}x^2}$ $\left(\frac{\text{Grad } 2}{\text{Grad } 2}\right)$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}}$

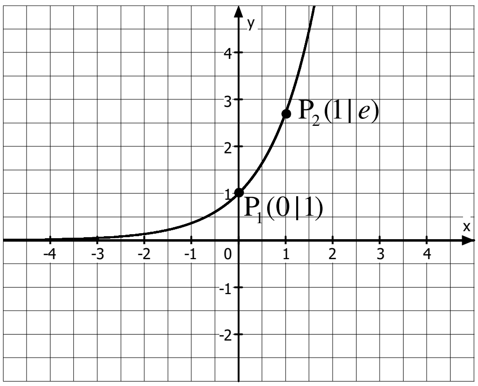


Fall 3: Zählergrad > Nennergrad: **Keine** waagrechte Asymptote.

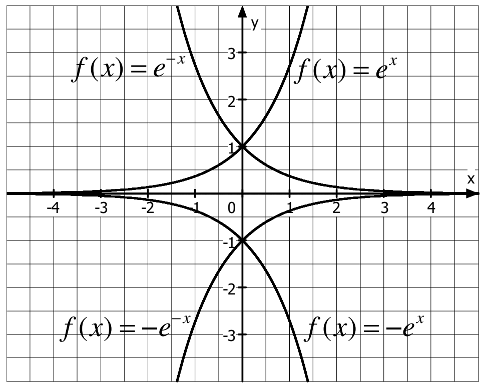
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf: $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in: $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)} + d$

a **- Streckung / Stauchung in *y*-Richtung**	$a > 1$:	„steiler“
	$0 < a < 1$:	„flacher“
	($a < 0$:	an der x-Achse gespiegelt)
b **- ansteigendes oder fallendes Schaubild**	$b > 0$:	ansteigendes Schaubild
	$b < 0$:	fallendes Schaubild (bzw. an der y-Achse gespiegelt)
c **- Verschiebung in *x*-Richtung**	$c > 0$:	nach rechts
	$c < 0$:	nach links
d **- Verschiebung in *y*-Richtung**	$d > 0$:	nach oben
($y = d$ ist Asymptote)	$d < 0$:	nach unten

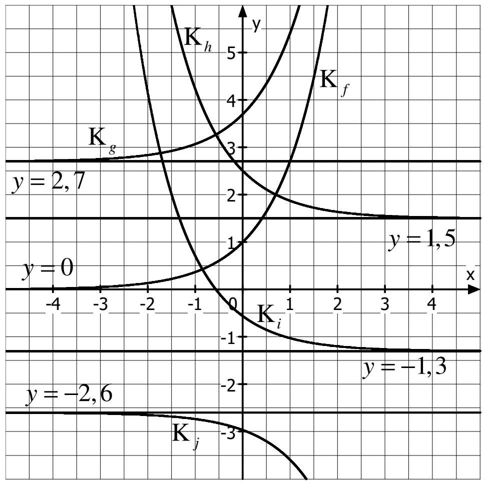
Vorsicht beim Koeffizienten *c*

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!
Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

http://frv.tv/7k

4. Asymptoten (Näherungsgeraden)

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x) = e^x$	$y = 0$ ($x-$Achse) für $x \to -\infty$	
$g(x) = e^x + 2{,}7$	$y = 2{,}7$ für $x \to -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 1{,}5$	$y = 1{,}5$ für $x \to +\infty$	
$i(x) = 2e^{-x-1} - 1{,}3$	$y = -1{,}3$ für $x \to +\infty$	
$j(x) = -e^{x-1} - 2{,}6$	$y = -2{,}6$ für $x \to -\infty$	

Regeln :

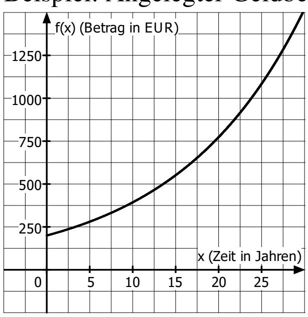
1. Asymptotengleichung : $y =$ „Exponentialgleichung ohne $e^{\text{"...}x\text{"}}$“

2. Annäherungsrichtung : Bei $e^{\text{"}+x\text{"}}$ für $x \to -\infty$ bzw. **bei $e^{\text{"}-x\text{"}}$ für $x \to +\infty$**

5. Anwendungen

Wachstum mit $f(x) = e^{\text{"}+x\text{"}}$

Beispiel: Angelegter Geldbetrag vermehrt sich



Zerfall mit $f(x) = e^{\text{"}-x\text{"}}$

Beispiel: Chemischer Stoff zerfällt