Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2024

Übungsbuch für die
schriftliche Prüfung
im Basisfach Mathematik
Baden-Württemberg
mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Teils A (hilfsmittelfreier Teil: HMF) und des Teils B des Mathematik-Abiturs im Basisfach ab 2024 in Baden-Württemberg für Waldorfschulen, Abendgymnasien und Schulfremde abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik sowie angepasste und erweiterte Abituraufgaben in einem Buch.

Ab 2024 ist die Struktur des hilfsmittelfreien Teils geändert: Es gibt drei elementare Pflichtaufgaben (P1 bis P3), davon jeweils eine aus Analysis, Geometrie und Stochastik, die alle ohne Wahlmöglichkeit zu bearbeiten sind. Dazu gibt es drei elementare Wahlaufgaben (W1 bis W3 im Wahlblock 1), davon jeweils eine aus Analysis, Geometrie und Stochastik, von denen eine beliebige von dem/der Schüler/in ausgewählt werden darf. Ferner gibt es drei komplexere Wahlaufgaben (W4 bis W6 im Wahlblock 2), davon jeweils eine aus Analysis, Geometrie und Stochastik, von denen eine beliebige von dem/der Schüler/in ausgewählt werden darf. Bei jeder Aufgabe sind 5 Bewertungseinheiten (BE) zu erreichen, insgesamt sind also maximal 25 Bewertungseinheiten (BE) zu erreichen. *Daher haben wir Original-Prüfungsaufgaben teilweise gekürzt oder erweitert und an die neuen Bestimmungen angepasst.* Somit erhalten Sie die bestmögliche Vorbereitung auf die Abiturprüfung.

- Der Teil A (HMF) besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung zu lösen sind. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

- Der Aufgabenteil B besteht aus komplexeren Aufgaben, die mithilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) und eines Formeldokuments gelöst werden sollen. Der Schwerpunkt liegt auf der Analysis. Thematisch geht es meist um anwendungsbezogene Transferaufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Aufgabenstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und um das Entwickeln von Lösungsstrategien. Pro Jahrgang gibt es zwei Aufgaben aus der Analysis (I 1 und I 2), zwei Aufgaben aus der Analytischen Geometrie (II 1 und II 2) sowie zwei Aufgaben aus der Stochastik (III 1 und III 2), von denen jeweils eine bearbeitet werden muss. In der Analysis-Aufgabe sind maximal 35 BE, in der Geometrie- und Stochastik-Aufgabe sind jeweils maximal 20 BE zu erreichen.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen ☐

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 225 Minuten (3 Stunden und 45 Minuten).
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Teil A (HMF) und den vom Lehrer ausgesuchten Teil B Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zuerst den Teil A (HMF). Nach dessen Abgabe nach spätestens 90 Minuten erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Formeldokument) für den Teil B.

Aufgabenteil A (hilfsmittelfrei, maximal 90 Minuten)

Analysis	Lineare Algebra/ Analytische Geometrie	Stochastik
	A (HMF): P1-P3, W1-W6	
	25 BE	

Aufgabenteil B

Analysis I 1 35BE	oder	Analysis I 2 35BE
Analytische Geometrie II 1 20 BE	oder	Analytische Geometrie II 2 20 BE
Stochastik III 1 20 BE	oder	Stochastik III 2 20 BE

Insgesamt können maximal 100 Bewertungseinheiten (BE) in der Prüfung erzielt werden, davon 25 BE im Teil A (HMF) und 75 BE im Teil B.
Aus den Bewertungseinheiten ergeben sich folgende Notenpunkte:

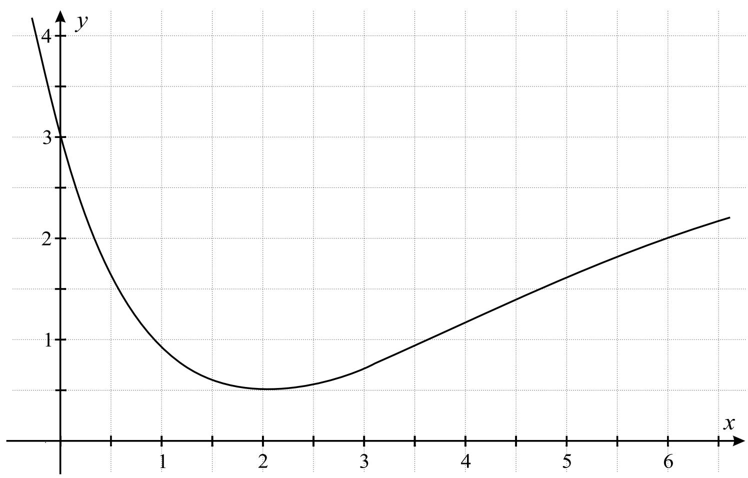
Bewertungseinheiten	Notenpunkte	Note
0 - 19	0	ungenügend
20 - 26	1	mangelhaft
27 - 32	2	
33 - 39	3	
40 - 44	4	ausreichend
45 - 49	5	
50 - 54	6	
55 - 59	7	befriedigend
60 - 64	8	
65 - 69	9	
70 - 74	10	gut
75 - 79	11	
80 - 84	12	
85 - 89	13	sehr gut
90 - 94	14	
95 - 100	15	

1 Analysis ☐

Tipps ab Seite 33, Lösungen ab Seite 48

1.1 Teil A Analysis

1) Die Abbildung zeigt den Graphen der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. ☐



a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

b) Die Funktion F ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $\mathrm{F}(3) = 0$.
Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle 2 an.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{F}(b) = \int_3^b f(x)\mathrm{d}x$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

2) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$. ☐

a) Zeigen Sie, dass $f'(3) = -\frac{3}{e}$ gilt.

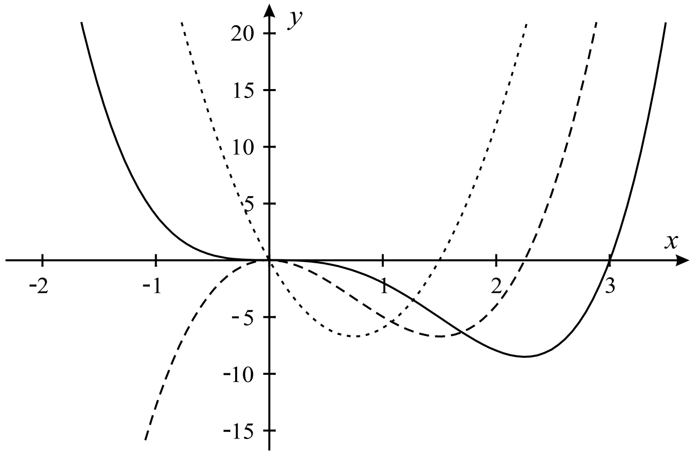
b) Bestimmen Sie die Gleichung einer Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3.

3) Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ gegeben. ☐

a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $\mathrm{S}(0 \mid 1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

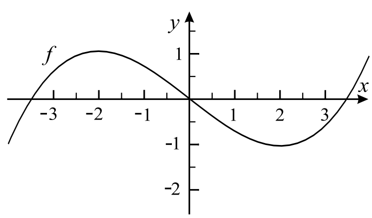
4) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^3$ und die Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitung. ☐



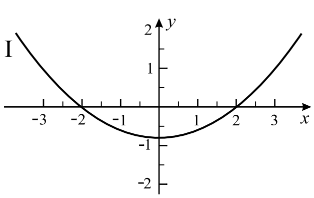
a) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f und ordnen Sie die Ableitungsfunktionen den abgebildeten Graphen zu.

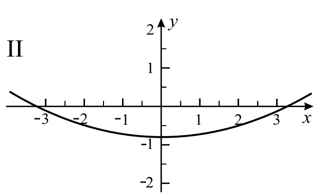
b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ursprung $(0 \mid 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist.

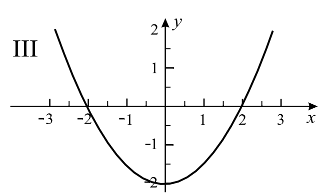
5) Der abgebildete Graph stellt eine Funktion f dar. ☐



a) Einer der folgenden Graphen I, II oder III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f.

I


II


III


Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

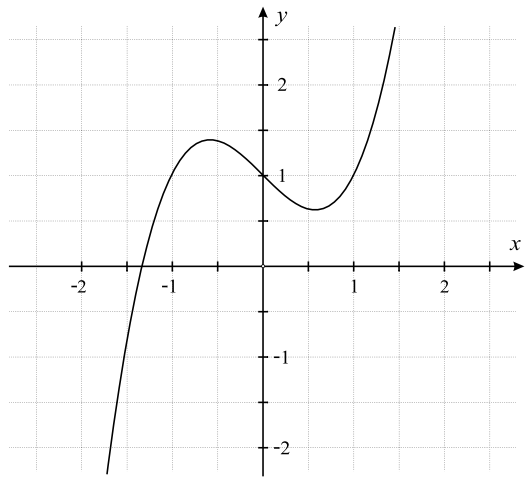
b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

6) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$. ☐

   a) Geben Sie die Periode von f an und skizzieren Sie den Graphen von f für $0 \leqslant x \leqslant 4$.

   b) Bestimmen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$.

7) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$. ☐



   a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

   b) Die erste Ableitung von h ist h'.
   Bestimmen Sie den Wert von $\displaystyle\int_0^1 h'(x)\mathrm{d}x$.

8) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$. ☐

   a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht.

   b) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g im Punkt $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ berühren.

9) Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = x^2 + 2$ und g durch $g(x) = -2x$. ☐

   a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

   b) Berechnen Sie die Stelle, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g am kleinsten ist.

10) Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und g und deren Stammfunktionen F und G sowie den Ableitungsfunktionen f' und g'. ☐
    Ordnen Sie jeweils die Schaubilder den entsprechenden Funktionen zu und begründen Sie kurz Ihre Vorgehensweise.

Schaubild 1

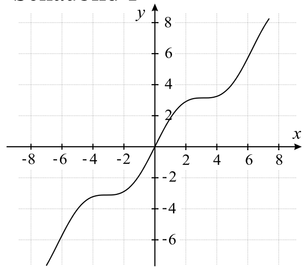


Schaubild 2

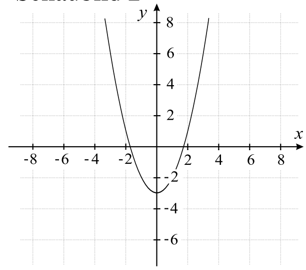


Schaubild 3

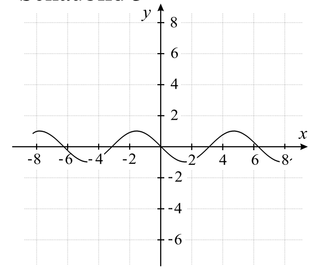


Schaubild 4

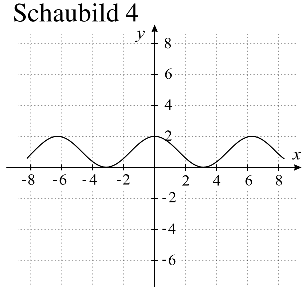


Schaubild 5

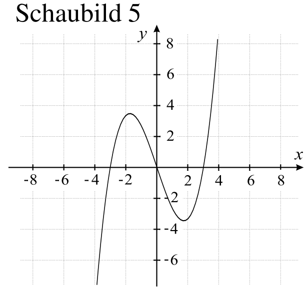
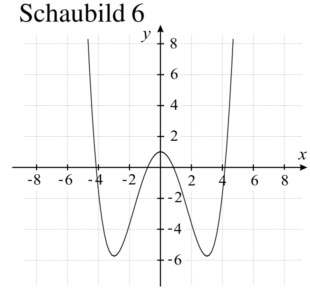


Schaubild 6



11) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot x$; $x \in \mathbb{R}$. ☐

a) Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat.

b) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P$(0 \mid 5)$ verläuft.

12) Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$. ☐

a) Es gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 1$.
Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei verschiedene Werte für a, sodass gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

b) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x+2)$; $x \in \mathbb{R}$ aus dem Schaubild von p hervorgeht.

13) Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$. ☐

a) Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leqslant x \leqslant 4$.

b) Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x)\mathrm{d}x$.

Tipps

1 Analysis

1.1 Teil A Analysis

1) a) Beachten Sie, dass dem gegebenen Integral in der Abbildung der Flächeninhalt A zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[3\,;\,5]$ entspricht. Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Fläche durch Abzählen der Kästchen oder indem Sie den Flächeninhalt eines Trapezes bestimmen. Verwenden Sie für den Flächeninhalt des Trapezes die Formel $\mathrm{A} = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei a und c die parallelen Seiten des Trapezes sind. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Funktionswerte an den entsprechenden Stellen.

   b) Beachten Sie, dass f die 1. Ableitung von F ist. Bestimmen Sie daher den Funktionswert von f an der Stelle 2 durch Ablesen.

   c) Bestimmen Sie das Integral $\int_3^b f(x)\mathrm{d}x$ mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und verwenden Sie $\mathrm{F}(3) = 0$.

2) a) Die 1. Ableitung von f erhalten Sie mithilfe der Produkt- und Kettenregel. Setzen Sie $x = 3$ in $f'(x)$ ein und beachten Sie, dass $e^{-1} = \frac{1}{e}$ ist,

   b) Bestimmen Sie zuerst die Koordinaten des Berührpunkts B, indem Sie $x = 3$ in $f(x)$ einsetzen. Die Steigung m der Tangente t ist die 1. Ableitung an der Stelle 3, also $m = f'(3)$. Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3 erhalten Sie, indem Sie m und die Koordinaten von B in die Hauptform $y = mx + b$ oder in die Punkt-Steigungsform $y - y_\mathrm{P} = m \cdot (x - x_\mathrm{P})$ einsetzen.

3) a) Die Nullstelle von f erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren lösen.

   b) Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt S erhalten Sie, indem Sie zuerst die Steigung m der Tangente t mithilfe der 1. Ableitung von f bestimmen. Verwenden Sie die Kettenregel und setzen Sie den x-Wert von S in $f'(x)$ ein.
   Setzen Sie anschließend m und die Koordinaten von S in die Hauptform $y = mx + b$ oder in die Punkt-Steigungsform $y - y_\mathrm{Q} = m \cdot (x - x_\mathrm{Q})$ ein, um die Gleichung der Tangente t zu erhalten. Der Schnittpunkt S von t mit der y-Achse ist schon gegeben, den Schnittpunkt N von t mit der x-Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $y = 0$ nach x auflösen. Skizzieren Sie das Dreieck OSN und überlegen Sie, welche Seiten die gleiche Länge besitzen.

4) a) Die erste und zweite Ableitung von f erhalten Sie mit der Potenzregel. Beachten Sie, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades eine Parabel ist.

b) Um zu zeigen, dass der Ursprung $(0 \mid 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist, setzen Sie $x = 0$ in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ ein. Falls $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ liegt bei $x = 0$ eine Wendestelle mit waagerechter Steigung vor.

5) a) Beachten Sie, dass die Extremstellen des Graphen von f die Nullstellen des Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f sind. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x = 0$ und prüfen Sie, welcher der Graphen an dieser Stelle einen anderen Funktionswert hat.

b) Beachten Sie, dass $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ gilt. Falls $\mathrm{F}'(x)$ im Intervall $[1; 3]$ kleiner als Null ist, ist F streng monoton fallend, sonst monoton wachsend.

6) a) Die Periode p von f erhalten Sie durch $p = \frac{2\pi}{b}$. Skizzieren Sie damit das Schaubild von f.

b) Zur Lösung der gegebenen Gleichung substituieren Sie $\frac{\pi}{2}x = z$ und lösen die Gleichung $\sin(z) = -1$ nach z auf. Durch Resubstitution erhalten Sie eine Lösung für x.

7) a) Beachten Sie die Anzahl der Extrempunkte, die Symmetrie und das Verhalten der Graphen für $x \longrightarrow \pm\infty$.

b) Das angegebene Integral erhalten Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Verwenden Sie die angegebene Funktion h als Stammfunktion.

8) a) Überlegen Sie, wie der Graph von e^{-x} aus dem Graph von e^{x} hervorgeht und welche Bedeutung das Minuszeichen vor e^{-x} sowie die Zahl (+2) haben.

b) Bestimmen Sie mithilfe der Kettenregel die 1. Ableitung von $f(x)$ und $g(x)$ und berechnen Sie $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$ und $g'(0)$.

9) a) Beachten Sie, dass der Graph von f eine nach oben verschobene Normalparabel und der Graph von g eine Gerade ist.

b) Stellen Sie zuerst eine Funktion $d(x)$ auf, welche die Differenz der Funktionswerte von f und g angibt. Anschließend bestimmen Sie das Minimum von $d(x)$ mit der 1. und 2. Ableitung von $d(x)$. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $d'(x) = 0$ und prüfen Sie, ob $d''(x) > 0$ ist.

10) Überlegen Sie, welche Schaubilder die Graphen trigonometrischer Funktionen sind.
Betrachten Sie beispielsweise bei $x \approx 3$, welches Schaubild einen Sattelpunkt hat, welches Schaubild die x-Achse berührt (Tiefpunkt) und welches Schaubild eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat.
Überlegen Sie, welche Schaubilder die Graphen ganzrationaler Funktionen sind und welchen Grad die Funktionen jeweils haben.

11) a) Den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat, erhalten Sie mithilfe der 1. Ableitung von h, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Lösen Sie

die Gleichung $h'(x) = 0$ nach x durch Logarithmieren auf. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den x-Wert in $h(x)$ einsetzen.

b) Eine allgemeine Stammfunktion H_c von h erhalten Sie, indem Sie durch die «innere Ableitung» teilen. Setzen Sie die Koordinaten von P in $H_c(x)$ ein und bestimmen Sie damit die Konstante c.

12) a) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion p im Intervall $[-3\pi, \pi]$.
Beachten Sie, dass der Wert des gegebenen Integrals dem Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion p und der x-Achse im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ entspricht.
Beachten Sie, dass das Schaubild von p symmetrisch zur y-Achse ist.
Beachten Sie, dass die Flächeninhalte oberhalb der x-Achse und unterhalb der x-Achse in einer Periode gleich groß, aber gegensätzlich orientiert sind, so dass sie sich gegenseitig aufheben.

b) Beachten Sie, dass durch das Minuszeichen vor $\cos(x)$ eine Spiegelung und durch $x+2$ eine Verschiebung entsteht.

13) a) Überlegen Sie, wie das Schaubild von h aus dem Schaubild der Funktion $\cos(x)$ hervorgegangen ist. Bestimmen Sie die Mittellinie und die Periode p von h durch $p = \frac{2\pi}{b}$.

b) Den Wert des Integrals erhalten Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$.

1.2 Teil B Straße

Aufgabe A 2.1

a) Die Koordinaten des nördlichsten Punktes der Umgehungsstraße erhalten Sie, indem Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von f den Hochpunkt des Graphen von f bestimmen. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f'(x) = 0$ mithilfe der abc-Formel nach x auf. Setzen Sie die erhaltenen x-Werte in $f''(x)$ ein; falls das Ergebnis kleiner als Null ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den x-Wert in $f(x)$ einsetzen. Die Entfernung d von H zu M erhalten Sie mithilfe der Formel für den Abstand zweier Punkte: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Bestimmen Sie die Wendestelle mithilfe der 2. und 3. Ableitung von $f(x)$. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auf. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den berechneten x-Wert in $f(x)$ einsetzen.
Berechnen Sie mithilfe von $f'(x)$ die Steigung m_A der Kurve im Punkt A sowie die Steigung m_AB der Geraden durch die Punkte A und B mithilfe der Formel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Falls $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{AB}$ mündet die Umgehungsstraße ohne Knick in die Ortsdurchfahrt ein.

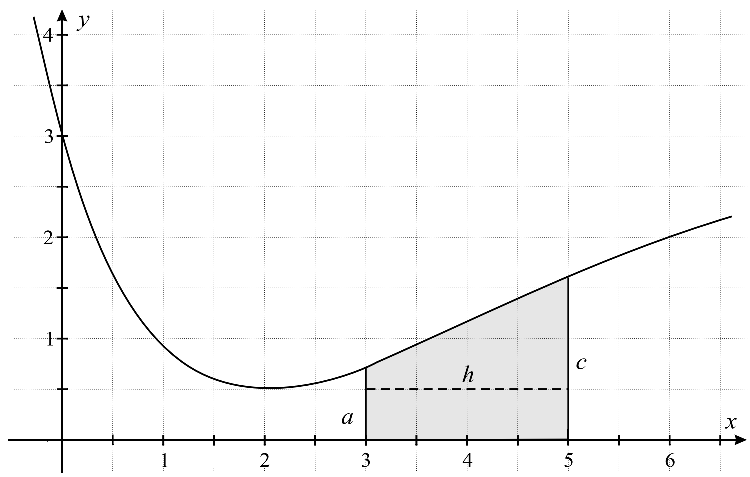
b) Die Gleichung der Geraden g durch A und B erhalten Sie mithilfe der Punkt-Steigungsform (PSF) $y = m \cdot (x - x_\mathrm{Q}) + y_\mathrm{Q}$. Setzen Sie die Koordinaten von A (oder B) und m_AB in die

Lösungen

1 Analysis

1.1 Teil A Analysis

1) a) Dem Integral $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$ entspricht in der Abbildung der Flächeninhalt A zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[3\,;5]$.



Durch Abzählen der Kästchen erhält man einen Näherungswert für die Fläche:

$$\mathrm{A} = \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x \approx 2,3$$

Alternativ kann man den Flächeninhalt A auch durch den Flächeninhalt eines Trapezes abschätzen:
Den Flächeninhalt eines Trapezes erhält man mit der Formel $\mathrm{A} = \frac{a+c}{2} \cdot h$. Die beiden parallelen Seiten des Trapezes sind $a = f(3) \approx 0,7$ und $c = f(5) \approx 1,6$. Für die Höhe h gilt: $h = 5 - 3 = 2$. Damit erhält man:

$$\mathrm{A} = \frac{f(3) + f(5)}{2} \cdot 2 \approx \frac{0,7 + 1,6}{2} \cdot 2 = 2,3$$

Somit hat das gegebene Integral einen Näherungswert von etwa $2,3$.

b) Da die Funktion F eine Stammfunktion von f ist, ist f die 1. Ableitung von F. Damit erhält man einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle 2 mithilfe der Abbildung, indem man den Funktionswert von f an der Stelle 2 abliest:

$$\mathrm{F}'(2) = f(2) \approx 0,5$$

c) Da die Funktion F die Stammfunktion von f mit $\mathrm{F}(3) = 0$ ist, gilt mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_3^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_3^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(3) = \mathrm{F}(b) - 0 = \mathrm{F}(b)$$

Somit gilt: $\mathrm{F}(b) = \int_3^b f(x)\mathrm{d}x$ mit $b \in \mathbb{R}$.

2) Es ist $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$.

a) Die 1. Ableitung von f bestimmt man mithilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{2-x} + x^2 \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = \left(2x - x^2\right) \cdot e^{2-x}$$

Setzt man $x = 3$ in $f'(x)$ ein, erhält man:

$$f'(3) = \left(2 \cdot 3 - 3^2\right) \cdot e^{2-3} = -3 \cdot e^{-1} = -\frac{3}{e}$$

Somit gilt: $f'(3) = -\frac{3}{e}$.

b) Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3 erhält man, indem man zuerst die Koordinaten des Berührpunkts B bestimmt. Setzt man $x = 3$ in $f(x)$ ein, ergibt sich:

$$y = f(3) = 3^2 \cdot e^{2-3} = 9 \cdot e^{-1} = \frac{9}{e} \;\Rightarrow\; \mathrm{B}\left(3 \mid \frac{9}{e}\right)$$

Die Steigung m der Tangente t ist die 1. Ableitung an der Stelle 3, also:

$$m = f'(3) = -\frac{3}{e}$$

Setzt man m und die Koordinaten von B in die Hauptform $y = mx + b$ ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{e} &= -\frac{3}{e} \cdot 3 + b \\
\frac{9}{e} &= -\frac{9}{e} + b \\
\frac{18}{e} &= b
\end{aligned}$$

Alternativ setzt man m und die Koordinaten von B in die Punkt-Steigungsform ein:

$$\begin{aligned}
y - y_{\mathrm{B}} &= m \cdot (x - x_{\mathrm{B}}) \\
t\colon\ y - \frac{9}{e} &= -\frac{3}{e} \cdot (x - 3) \\
t\colon\ y - \frac{9}{e} &= -\frac{3}{e} \cdot x + \frac{9}{e} \\
t\colon\ y &= -\frac{3}{e} \cdot x + \frac{18}{e}
\end{aligned}$$

Somit hat die Tangente t an den Graphen von f an der Stelle 3 die Gleichung

$$t\colon\, y = -\frac{3}{e}\cdot x + \frac{18}{e}$$

3) Es ist $f(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$.

a) Die Nullstelle von f erhält man durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 &= 0 \\ 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} &= 1 \\ e^{\frac{1}{2}x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ x &= 2\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Somit hat f die Nullstelle $x = 2\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $\mathrm{S}(0 \mid 1)$ erhält man, indem man zuerst die Steigung m der Tangente t mithilfe der 1. Ableitung von f bestimmt. Die 1. Ableitung von f erhält man mit der Kettenregel:

$$f'(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}$$

Setzt man $x = 0$ in $f'(x)$ ein, ergibt sich:

$$m = f'(0) = e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = 1$$

Setzt man m und die Koordinaten von S in die Hauptform $y = mx + b$ ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 &= 1\cdot 0 + b \\ 1 &= b \end{aligned}$$

Alternativ setzt man m und die Koordinaten von S in die Punkt-Steigungsform ein:

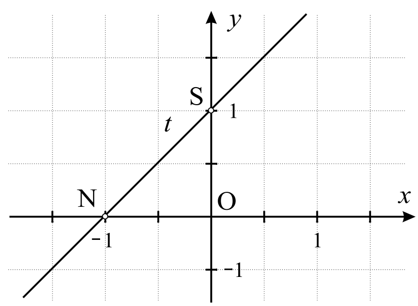
$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\cdot(x - x_1) \\ t\colon\, y - 1 &= 1\cdot(x - 0) \\ t\colon\, y &= x + 1 \end{aligned}$$

Somit hat die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $\mathrm{S}(0 \mid 1)$ die Gleichung:

$$t\colon\, y = x + 1$$

Der Schnittpunkt von t mit der y-Achse ist der gegebene Punkt $S(0 \mid 1)$.
Den Schnittpunkt N von t mit der x-Achse erhält man, indem man die Gleichung $y = 0$ nach x auflöst:

$$0 = x+1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow N(-1 \mid 0)$$



Das Dreieck OSN, welches die Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt, hat zwei Seiten mit jeweils der Länge 1 LE, nämlich $\overline{OS} = 1$ und $\overline{ON} = 1$. Somit ist das Dreieck OSN gleichschenklig.

4) Es ist $f(x) = x^4 - 3x^3$.

a) Die erste und zweite Ableitung von f erhält man mit der Potenzregel:

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 18x$$

Da die erste Ableitung von f eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist, gehört sie zum gestrichelten Graphen (kubische Parabel). Da die zweite Ableitung von f eine ganzrationale Funktion zweiten Grades ist, gehört sie zum gepunkteten Graphen (Parabel).

b) Um zu zeigen, dass der Ursprung $(0 \mid 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist, setzt man $x = 0$ in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x) = 24x - 18$ ein:

$$f(0) = 0^4 - 3 \cdot 0^3 = 0$$
$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 = 0$$
$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 = 0$$
$$f'''(0) = 24 \cdot 0 - 18 = -18$$

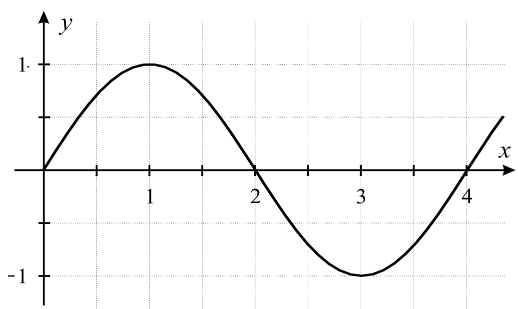
Wegen $f(0) = 0$ liegt der Ursprung $(0 \mid 0)$ auf dem Graphen von f.
Wegen $f'(0) = 0$ hat der Graph von f im Ursprung eine waagerechte Tangente.
Wegen $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ liegt bei $x = 0$ eine Wendestelle vor.
Somit ist der Ursprung ein Sattelpunkt des Graphen von f.

5) a) Der Graph I ist der Graph der ersten Ableitungsfunktion von f.
Da der Graph von f bei $x = -2$ und $x = 2$ Extremstellen hat, muss der Graph der ersten Ableitungsfunktion von f bei $x = -2$ und $x = 2$ Nullstellen haben. Dies ist bei Graph II nicht der Fall. Also kommt der Graph II als Graph der ersten Ableitungsfunktion von f nicht infrage.
Der Graph von f hat an der Stelle $x = 0$ etwa die Steigung -1. Da der Graph III aber bei $x = 0$ den Wert -2 statt -1 hat, kommt er als Graph der ersten Ableitungsfunktion von f nicht infrage.

b) Da die Funktion F eine Stammfunktion von f ist, beschreibt der Graph von f die Steigung von F, da $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ gilt. Im Intervall $[1; 3]$ verläuft der Graph von f unterhalb der x-Achse, so dass für dieses Intervall stets $f(x) = \mathrm{F}'(x) < 0$ gilt. Somit ist F streng monoton fallend.

6) Es ist $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Die Periode p von f erhält man durch $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4$.
Damit erhält man folgendes Schaubild von f:



b) Eine Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$ erhält man durch Substitution:
Setzt man $\frac{\pi}{2}x = z$, so ergibt sich: $\sin(z) = -1$ mit der möglichen Lösung $z = \frac{3}{2}\pi$.
Durch Resubstitution erhält man: $\frac{\pi}{2}x = \frac{3}{2}\pi \;\Rightarrow\; x = 3$.
Eine mögliche Lösung der Gleichung $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$ ist somit $x = 3$.

7) Gegeben sind $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) Bei der gegebenen Abbildung handelt es sich um den Graphen der Funktion g.
Es kann nicht der Graph von f sein, da der Graph von f eine Parabel ist, welche nur einen Extrempunkt besitzt.
Es kann nicht der Graph von h sein, da die y-Werte des Graphen von h für $x \to \pm\infty$ gegen $+\infty$ gehen. Außerdem ist der Graph von h achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Potenzen vorkommen.

b) Das angegebene Integral erhält man mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Als Stammfunktion verwendet man die gegebene Funktion h:

$$\begin{aligned}\int_0^1 h'(x)\mathrm{d}x &= \Big[h(x)\Big]_0^1 \\ &= \Big[x^4+x^2+1\Big]_0^1 \\ &= \big(1^4+1^2+1\big)-\big(0^4-0^2+1\big) \\ &= 2\end{aligned}$$

8) a) Wegen $g(x) = -f(-x)+2$ entsteht der Graph von g aus dem Graph von f durch Spiegelung an der x-Achse, durch Spiegelung an der y-Achse und durch Verschiebung um 2 LE in y-Richtung.

b) Um zu zeigen, dass sich die Graphen von f und g in $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ berühren, muss man nachweisen, dass $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ auf beiden Graphen liegt (für $x = 0$ müssen also beide y-Werte gleich 1 sein) und dass die Steigung der Tangente in P bei beiden Graphen gleich ist.
Hierzu setzt man den Wert $x = 0$ in $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x}+2$ bzw. $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = -e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}$ ein:

$$\begin{aligned}&f(0) = e^0 = 1 && f'(0) = e^0 = 1 \\ &g(0) = -e^{-0}+2 = -1+2 = 1 && g'(0) = e^{-0} = 1\end{aligned}$$

Wegen $f(0) = g(0) = 1$ liegt $\mathrm{P}(0 \mid 1)$ auf beiden Graphen.
Wegen $f'(0) = g'(0) = 1$ sind die Tangentensteigungen in P gleich.
Damit berühren sich die Graphen von f und g in $\mathrm{P}(0 \mid 1)$.

9) Es ist $f(x) = x^2+2$ und $g(x) = -2x$.

a) Der Graph von f ist eine Normalparabel, die um zwei Längeneinheiten nach oben verschoben wurde.
Der Graph von g ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung -2.

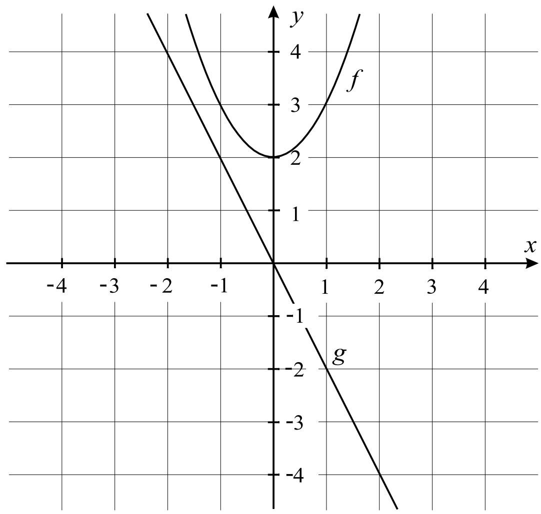
b) Um die Stelle, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g am kleinsten ist, zu berechnen, stellt man zuerst eine Funktion $d(x)$ auf, welche die Differenz der beiden Funktionen darstellt:

$$d(x) = f(x)-g(x) = x^2+2-(-2x) = x^2+2x+2$$

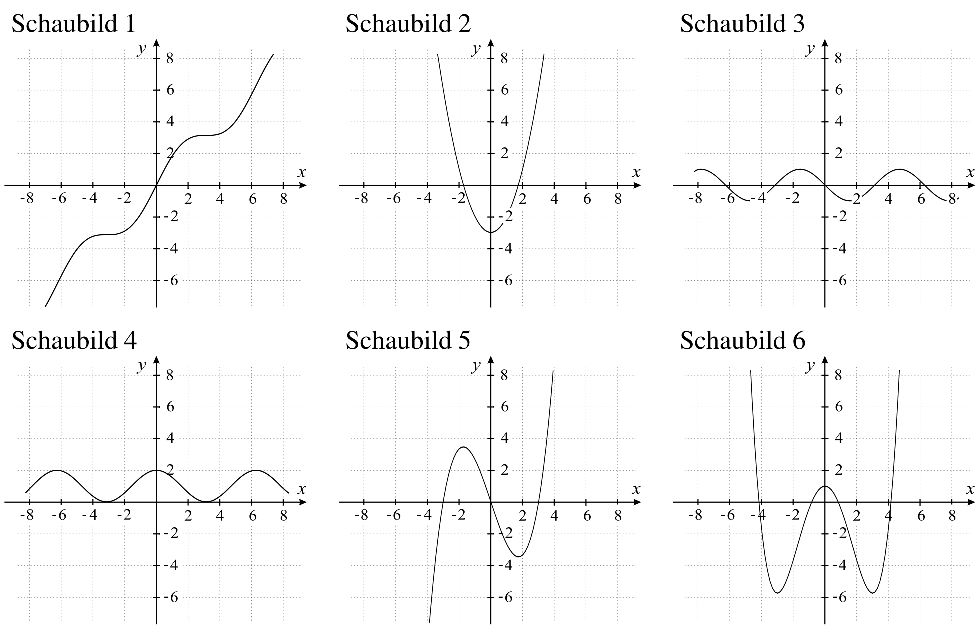
Das Minimum von $d(x)$ erhält man mit der 1. und 2. Ableitung von $d(x)$:

$$\begin{aligned}d'(x) &= 2x+2 \\ d''(x) &= 2\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung $d'(x) = 0$ führt zu $2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$.
Wegen $d''(-1) = 2 > 0$ handelt es sich um ein Minimum.
Somit ist an der Stelle $x = -1$ die Differenz der Funktionswerte von f und g am kleinsten mit $d(-1) = 1$.



10) Gegeben sind die folgenden Schaubilder:



Die Schaubilder 1, 3 und 4 sind die Graphen trigonometrischer Funktionen.
Ist das Schaubild 4 der Graph einer Funktion f, so ist Schaubild 1 der Graph der zugehörigen Stammfunktion F und Schaubild 3 der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion

f', da beispielsweise bei $x \approx 3$ Schaubild 1 einen Sattelpunkt hat, Schaubild 4 die x-Achse berührt (Tiefpunkt) und Schaubild 3 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat.
Die Schaubilder 2, 5 und 6 sind die Graphen ganzrationaler Funktionen.
Ist das Schaubild 5 der Graph einer Funktion g, so ist Schaubild 6 der Graph der zugehörigen Stammfunktion G und Schaubild 2 der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion g', da der Graph von Schaubild 5 den Grad 3 hat, während Schaubild 6 den Grad 4 und Schaubild 2 den Grad 2 hat.

11) a) Den Punkt, an dem das Schaubild von h mit $h(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot x$; $x \in \mathbb{R}$ eine waagrechte Tangente hat, erhält man mithilfe der 1. Ableitung von h, die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$h'(x) = 2\cdot e^{2\cdot x} - 4$$

Da die Steigung einer waagrechten Tangente Null ist, löst man die Gleichung $h'(x) = 0$ durch Logarithmieren nach x auf:

$$\begin{aligned} 2\cdot e^{2\cdot x} - 4 &= 0 \\ 2\cdot e^{2\cdot x} &= 4 \\ e^{2\cdot x} &= 2 \\ 2\cdot x &= \ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man den x-Wert in $h(x)$ einsetzt:

$$y = h\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) = e^{2\cdot\frac{\ln(2)}{2}} - 4\cdot\frac{\ln(2)}{2} = e^{\ln(2)} - 2\cdot\ln(2) = 2 - 2\cdot\ln(2)$$

Somit hat der Punkt mit waagrechter Tangente die Koordinaten $\left(\frac{\ln(2)}{2} \mid 2 - 2\cdot\ln(2)\right)$.

b) Eine allgemeine Stammfunktion H_c von h mit $h(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot x$; $x \in \mathbb{R}$ erhält man, indem man durch die «innere Ableitung» teilt:

$$H_c(x) = \frac{e^{2\cdot x}}{2} - \frac{4}{2}\cdot x^2 + c = \frac{e^{2\cdot x}}{2} - 2\cdot x^2 + c$$

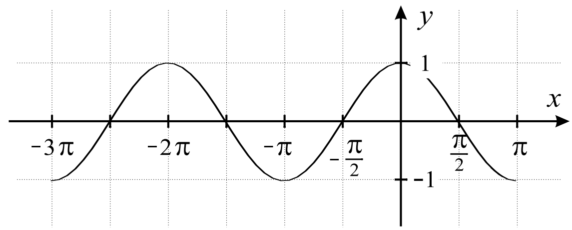
Da das Schaubild der gesuchten Stammfunktion durch den Punkt $P(0 \mid 5)$ verläuft, setzt man die Koordinaten von P in $H_c(x)$ ein und erhält:

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{e^{2\cdot 0}}{2} - 2\cdot 0^2 + c \\ 5 &= \frac{1}{2} - 0 + c \\ 4{,}5 &= c \end{aligned}$$

Somit hat die gesuchte Stammfunktion die Gleichung $H(x) = \frac{e^{2\cdot x}}{2} - 2\cdot x^2 + 4{,}5$.

12) Es ist $p(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

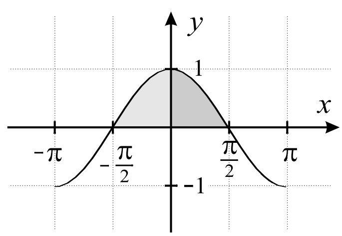
a) Es gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 1$. Zur Veranschaulichung erstellt man eine Skizze der Funktion p mit $p(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$:



Um zwei verschiedene Werte von a zu bestimmen, sodass $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 2$, kann man sich Folgendes überlegen:

Der Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 1$ entspricht dem Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion p und der x-Achse im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

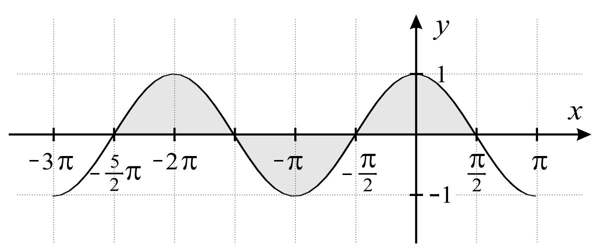
Da das Schaubild von p symmetrisch zur y-Achse ist, hat auch der Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion p und der x-Achse im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ den Wert 1.



Damit gilt:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 2$$

Da die Flächeninhalte oberhalb der x-Achse und unterhalb der x-Achse in einer Periode gleich groß, aber gegensätzlich orientiert sind, heben sie sich gegenseitig auf.



Damit gilt:

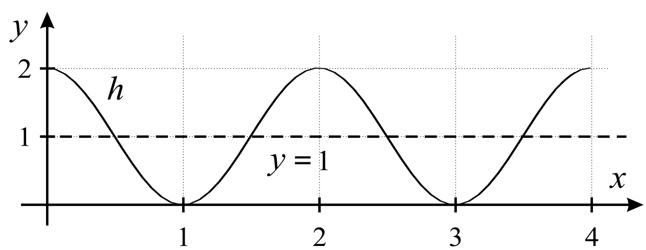
$$\int_{-\frac{5}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 2$$

Somit ergibt sich beispielsweise $a_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $a_2 = -\frac{5}{2}\pi$.

b) Das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x+2)$; $x \in \mathbb{R}$ geht aus dem Schaubild von p mit $p(x) = \cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$ durch Spiegelung an der x-Achse (wegen des Minuszeichens) und durch Verschiebung um 2 LE nach links in x-Richtung (wegen $x+2$) hervor.

13) Es ist $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ für $0 \leqslant x \leqslant 4$.

a) Um das Schaubild von $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ für $0 \leqslant x \leqslant 4$ zu skizzieren, überlegt man sich, wie das Schaubild von h aus dem Schaubild der Funktion $\cos(x)$ hervorgegangen ist: Das Schaubild von $\cos(x)$ wurde um eine LE nach oben verschoben (wegen $+1$), d.h. die Mittellinie ist $y = 1$. Außerdem wurde es in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ gestreckt: Die Periode p von h erhält man durch $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
Damit ergibt sich:



b) Den Wert des Integrals $\int_0^2 h(x)\mathrm{d}x$ erhält man mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^2 h(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 (\cos(\pi \cdot x) + 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi} + x\right]_0^2 \\ &= \frac{\sin(\pi \cdot 2)}{\pi} + 2 - \left(\frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi} + 0\right) \\ &= \frac{0}{\pi} + 2 - \left(\frac{0}{\pi} + 0\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

Stichwortverzeichnis