

Rosner

# Mathe gut erklärt

Baden-Württemberg  
Abitur 2017  
Allgemeinbildende Gymnasien

Freiburger  
Verlag

## Inhaltsverzeichnis

<b>I. Grundlagen Analysis</b>	7
<b>1 Funktionen</b>	8
1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)	8
1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen	10
1.3 Gebrochenrationale Funktionen	12
1.4 Exponentialfunktionen	14
1.5 Trigonometrische Funktionen	16
1.6 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben	18
1.7 Funktionenscharen	20
1.8 Symmetrie zur $y$ -Achse bzw. zum Ursprung	22
1.9 Abschnittsweise definierte Funktionen	23
1.10 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze	23
<b>2 Gleichungen</b>	24
2.1 Gleichungstypen: Übersicht	24
2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsverfahren	26
2.3 Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen	32
2.4 Lineare Gleichungssysteme	34
<b>3 Differenzialrechnung</b>	36
3.1 Ableitungsregeln	36
3.2 Tangente und Normale	39
3.3 Schnittpunkte (Berührungspunkt, senkrechter Schnitt, Schnittwinkel)	42
3.4 Monotonie	44
3.5 Krümmung	45
3.6 Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)	46
3.7 Wendepunkte	47
3.8 Sattelpunkte	48
3.9 Ortskurve	52
3.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung	54
3.11 Ermittlung von Funktionsgleichungen	56
3.12 Extremwertaufgaben	58
3.13 Wachstum und Zerfall	60
<b>4 Integralrechnung</b>	62
4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)	62
4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und $x$ -Achse	66
4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern	68
4.4 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen Schaubild und $x$ -Achse rotiert um die $x$ -Achse	72
4.5 Berechnung des Rotationsvolumens: Fläche zwischen zwei Schaubildern	

rotiert um die $x$ -Achse . . . . .	73
4.6 Mittelwert (durchschnittlicher $y$ -Wert) einer Funktion . . . . .	74
4.7 Flächen, die bis ins Unendliche reichen (Uneigentliche Integrale) . . . . .	75
4.8 Zusatz: Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben . . . . .	76
<b>II. Grundlagen Vektorgeometrie . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>1 Vorwissen . . . . .</b>	<b>82</b>
1.1 Punkte (im $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	82
1.2 Vektoren (im $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	82
1.3 Rechnen mit Vektoren (Addition, Subtraktion, Betrag, Skalare Multiplikation, Linearkombination, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Skalarprodukt, Vektorprodukt) . . . . .	83
<b>2 Geraden . . . . .</b>	<b>86</b>
2.1 Geradengleichungen in Parameterform . . . . .	86
2.2 Gegenseitige Lage von Geraden . . . . .	88
<b>3 Ebenen . . . . .</b>	<b>90</b>
3.1 Ebenengleichungen in Parameterform . . . . .	90
3.2 Ebenengleichungen in Normalenform . . . . .	92
3.3 Ebenengleichungen in Koordinatenform . . . . .	94
3.4 Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem . . . . .	95
3.5 Umwandlungen der Ebenenformen . . . . .	96
<b>4 Gegenseitige Lage . . . . .</b>	<b>100</b>
4.1 Ebene-Gerade . . . . .	100
4.2 Ebene-Ebene . . . . .	102
<b>5 Schnittwinkel . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>6 Abstandsberechnungen . . . . .</b>	<b>106</b>
6.1 Abstände zu einem Punkt . . . . .	107
6.2 Abstände zu einer Geraden . . . . .	110
6.3 Abstände zu einer Ebene . . . . .	111
<b>7 Zusatz: Bewegungsaufgaben (Modellieren mit Vektoren) . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>8 Spiegelungen . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>III. Grundlagen Stochastik . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>1 Baumdiagramm, Pfadregeln und Erwartungswert . . . . .</b>	<b>118</b>
1.1 Einführung . . . . .	118
1.2 Aufgabentypen . . . . .	121
1.3 Zufallsvariable und Erwartungswert . . . . .	124
<b>2 Binomialverteilung . . . . .</b>	<b>128</b>
2.1 Bernoulliformel . . . . .	128

2.2	Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung . . . . .	130
2.3	Aufgabentypen . . . . .	132
<b>3</b>	<b>Der einseitige Hypothesentest</b> . . . . .	<b>136</b>
3.1	Ausführliche Erklärung . . . . .	136
3.2	Vorgehen und Beispiele . . . . .	137
3.3	Fehler 1. Art und 2. Art . . . . .	142

## **Vorwort**

### **Liebe Schülerinnen und Schüler,**

dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- die Abitursaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

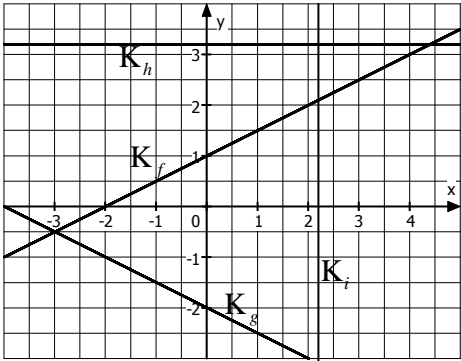
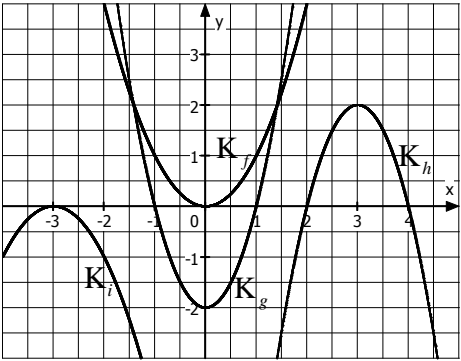
### **Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,**

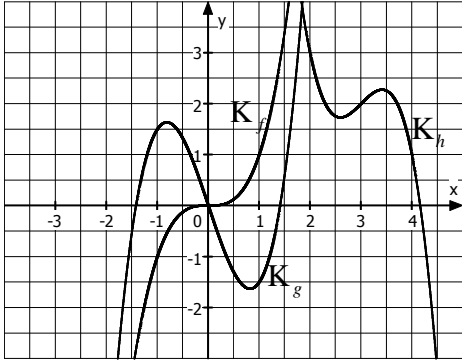
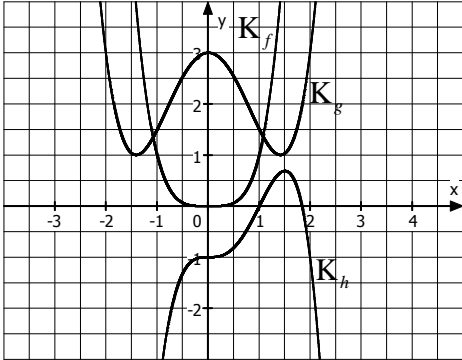
dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

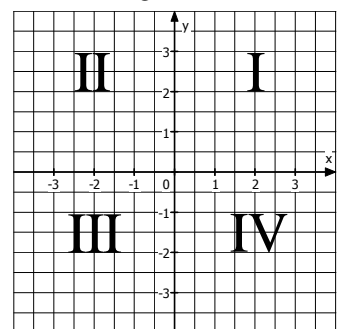
# 1. Funktionen

## 1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

1. Grades (Geraden)	2. Grades (Parabeln)
<p><b>Hauptform : <math>y = mx + b</math></b></p> <p>Steigung aus 2 Punkten: <math>m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}</math></p> <p>Punkt-Steigungs-Form (PSF):  <math>y = m \cdot (x - x_1) + y_1</math></p> <p>Steigungswinkel aus Steigung bestimmen:  <math>m = \tan(\alpha)</math></p> <p>Parallele Geraden:  <math>m_1 = m_2</math> (gleiche Steigung)</p> <p>Senkrechte (orthogonale) Geraden:                      Steigungen sind negative Kehrwerte                      voneinander: <math>m_2 = -\frac{1}{m_1}</math> bzw. <math>m_1 \cdot m_2 = -1</math></p> <p>1. Winkelhalbierende: <math>y = x</math> (<math>m = 1</math>)                      2. Winkelhalbierende: <math>y = -x</math> (<math>m = -1</math>)</p>  <p> <math>K_f: y = 0,5x + 1</math>     <math>K_g: y = -0,5x - 2</math>  <math>K_h: y = 3,2</math>     <math>K_i: x = 2,2</math> </p>	<p><b>Allg.: <math>f(x) = ax^2 + bx + c</math></b></p> <p>Scheitelpunkt-Ansatz:  <math>f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s</math> mit <math>S(x_s   y_s)</math></p> <p><math>a &gt; 0</math>: nach oben geöffnet bzw. Verlauf von II nach I</p> <p><math>a &lt; 0</math>: nach unten geöffnet bzw. Verlauf von III nach IV</p> <p>Bei Symmetrie zur y-Achse:  <math>f(x) = ax^2 + c</math> (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p> <math>K_f: f(x) = x^2</math>     <math>K_g: g(x) = 2x^2 - 2</math>  <math>K_h: h(x) = -2(x-3)^2 + 2</math>  <math>K_i: i(x) = -(x+3)^2</math> </p>

3. Grades	4. Grades
<p><b>Allg.: <math>f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d</math></b></p> <p><math>a &gt; 0</math>: Verlauf von III nach I</p> <p><math>a &lt; 0</math>: Verlauf von II nach IV</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung:  <math>f(x) = ax^3 + cx</math> (nur ungerade Hochzahlen)</p>  <p><math>K_f: f(x) = x^3</math>  <math>K_g: g(x) = 1,5x^3 - 3x</math>  <math>K_h: h(x) = -2x^3 + 18x^2 - 53x + 53</math></p>	<p><b>Allg.: <math>f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e</math></b></p> <p><math>a &gt; 0</math>: Verlauf von II nach I</p> <p><math>a &lt; 0</math>: Verlauf von III nach IV</p> <p>Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse:  <math>f(x) = ax^4 + cx^2 + e</math> (nur gerade Hochzahlen)</p>  <p><math>K_f: f(x) = x^4</math>  <math>K_g: g(x) = 0,5x^4 - 2x^2 + 3</math>  <math>K_h: h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1</math></p>

**Die Quadranten**



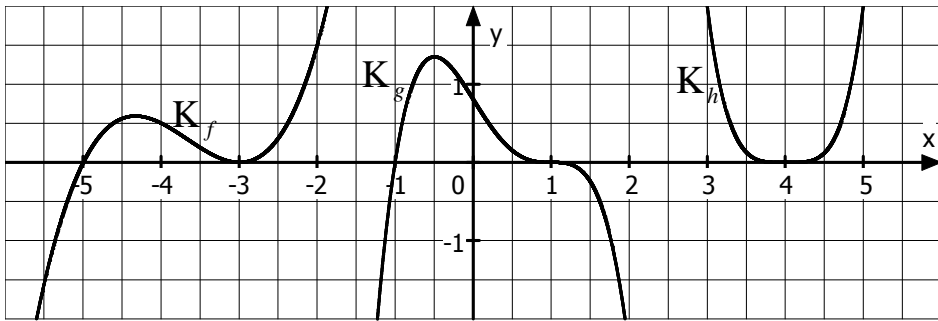
**Tipp** (für alle ganzrationalen Funktionen)

$a > 0$ : Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)

$a < 0$ : Verlauf von ... nach **VI** („endet **unten**“)

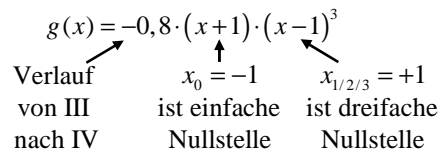
## 1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

### Beispiele

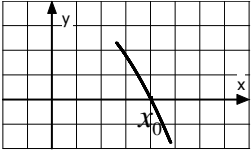
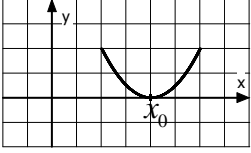
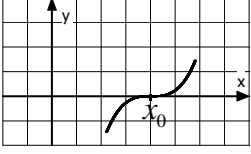
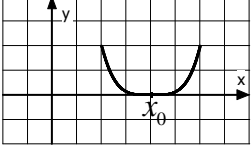


$K_f: f(x) = 0,5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$     
  $K_g: g(x) = -0,8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$     
  $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

### Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)



## Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	Faktor im Nullstellenansatz	Skizze	Beschreibung
<b>Einfache</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0) \cdot \dots$		Schaubild <b>schneidet</b> $x$ -Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
<b>Doppelte</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \dots$		Schaubild <b>berührt</b> $x$ -Achse (ohne VZW)
<b>Dreifache</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \dots$		Schaubild <b>schneidet</b> und <b>berührt</b> $x$ -Achse (mit VZW)
<b>Vierfache</b> Nullstelle: $x_0$	$f(x) = \dots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \dots$		Schaubild <b>berührt</b> $x$ -Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)



### 1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg.  $f(x) = \frac{\text{(ganzrationale) Funktion}}{\text{(ganzrationale) Funktion}}$       Beispiel:  $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{x + 2}$  (mit  $D = \mathbb{R} \setminus -2$ )

#### 1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

$x$ -Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche  $x$ -Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.

An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.

(Hinweis: Asymptote = Näherungsgerade)

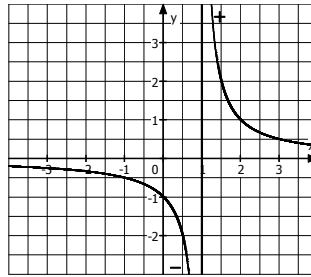
##### Fall 1 : Polstelle mit Vorzeichenwechsel (einfache Nullstelle des Nenners)

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  (mit  $D = \mathbb{R} \setminus 1$ )

Senkrechte Asymptote:  $x = 1$

Für  $x \rightarrow 1$  ( $x < 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow -\infty$

Für  $x \rightarrow 1$  ( $x > 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow +\infty$



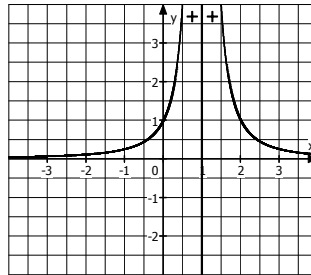
##### Fall 2 : Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (doppelte Nullstelle des Nenners)

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  (mit  $D = \mathbb{R} \setminus 1$ )

Senkrechte Asymptote:  $x = 1$

Für  $x \rightarrow 1$  ( $x < 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow +\infty$

Für  $x \rightarrow 1$  ( $x > 1$ ) gilt:  $f(x) \rightarrow +\infty$



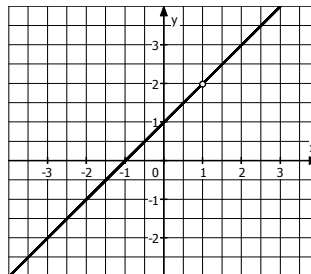
##### Fall 3 (Ausnahme) : Keine Polstelle (auch Nullstelle des Zählers)

Beispiel:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  (mit  $D = \mathbb{R} \setminus 1$ )

Keine senkrechte Asymptote (trotz Definitionslücke)

Grund:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = x + 1$

Die Definitionslücke ist nach dem Kürzen „verschwunden“. Sie ist also (be-)hebbar.  
(Wobei die Ausgangsfunktion diese noch immer aufweist, siehe Schaubild.)

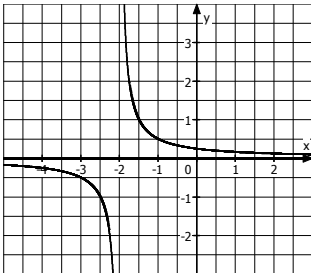


## 2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ )

### Fall 1 : Zählergrad < Nennergrad : $x$ - Achse ist waagrechte Asymptote

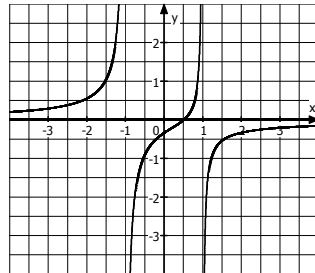
$$f(x) = \frac{1}{2x+4} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 0} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote:  $y = 0$  ( $x$ -Achse)



$$f(x) = \frac{-2x+1}{3x^2-3} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

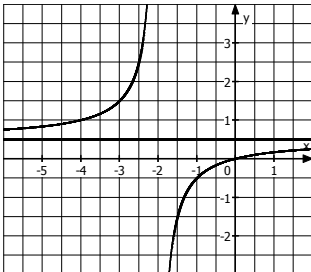
waagrechte Asymptote:  $y = 0$  ( $x$ -Achse)



### Fall 2 : Zählergrad = Nennergrad : Waagrechte Asymptote

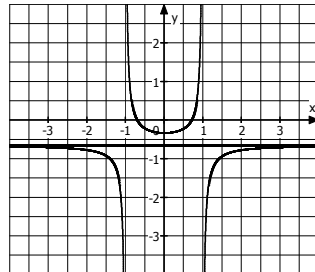
$$f(x) = \frac{1x}{2x+4} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 1} \\ \text{Grad 1} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote:  $y = \frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{-2x^2+1}{3x^2-3} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Grad 2} \\ \text{Grad 2} \end{array} \right)$$

waagrechte Asymptote:  $y = -\frac{2}{3}$



### Fall 3 : Zählergrad > Nennergrad: Keine waagrechte Asymptote.

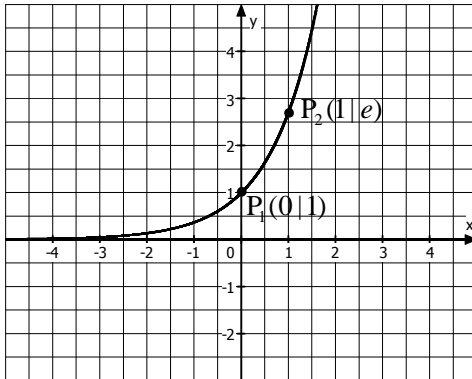
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

### Hinweise

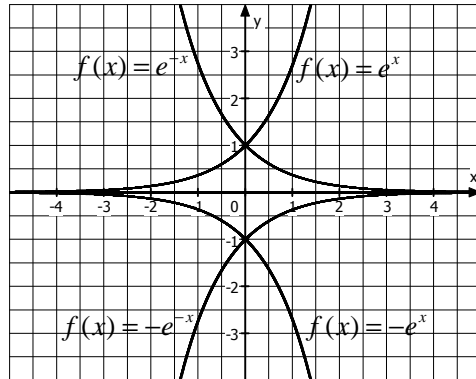
- $x$ -Werte, für die der **Nenner** gleich **0** ist sind **Definitionslücken**  $\left( \frac{\dots}{0} = ? \right)$
- $x$ -Werte, für die der **Zähler** gleich **0** ist sind **Nullstellen**  $\left( \frac{0}{\dots} = 0 \right)$

## 1.4 Exponentialfunktionen

### 1. Verlauf : $f(x) = e^x$



### 2. Spiegelungen



### 3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)} + d$

**a - Streckung / Stauchung in y-Richtung**

$a > 1$ : „steiler“  
 $0 < a < 1$ : „flacher“  
 $(a < 0$ : an der x-Achse gespiegelt)

**b - ansteigendes oder fallendes Schaubild**

$b > 0$ : ansteigendes Schaubild  
 $b < 0$ : fallendes Schaubild  
 (bzw. an der y-Achse gespiegelt)

**c - Verschiebung in x-Richtung**

$c > 0$ : nach rechts  
 $c < 0$ : nach links

**d - Verschiebung in y-Richtung**

( $y = d$  ist Asymptote)

$d > 0$ : nach oben  
 $d < 0$ : nach unten

#### Vorsicht beim Koeffizienten c

Das Schaubild zu  $f(x) = e^{x-3}$  wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!

Der Koeffizient c hat hier den Wert +3, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend  $f(x) = e^{x+2}$ : Verschiebung um 2 nach *links*!

#### 4. Asymptoten (Naherungsgeraden)

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x) = e^x$	$y = 0$ ( $x$ -Achse) für $x \rightarrow -\infty$	
$g(x) = e^x + 2,2$	$y = 2,2$ für $x \rightarrow -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 2,2$	$y = 2,2$ für $x \rightarrow +\infty$	
$i(x) = e^{-x} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \rightarrow +\infty$	
$j(x) = 0,5e^{x-2} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \rightarrow -\infty$	

##### 1. Regel (Asymptotengleichung): $y =$ ,Exponentialgleichung ohne $e^{\dots x}$ “

Man erhält die Asymptotengleichung, indem man die Gleichung der Exponentialfunktion schlicht übernimmt, jedoch hierbei auf den Summanden im Funktionsterm, der  $e^{\dots x}$  enthält (dieser strebt gegen 0), verzichtet.

##### 2. Regel (Annaherungsrichtung): Bei $e^{+x}$ für $x \rightarrow -\infty$ bzw. bei $e^{-x}$ für $x \rightarrow +\infty$

Die Annaherungsrichtung wird durch den Summanden im Funktionsterm, der  $e^{\dots x}$  enthält, festgelegt: Steht vor dem  $x$  im Exponenten ein Pluszeichen, so nähert sich die Asymptote für große negative  $x$ -Werte („links“ im Koordinatensystem) dem Schaubild an.

Steht hier hingegen ein Minuszeichen, so findet die Annäherung bei großen positiven  $x$ -Werten („rechts“ im Koordinatensystem) statt.

#### 5. Anwendungen

Wachstumsvorgänge werden oft mit dem Typ  $f(x) = e^{+x}$  modelliert, Zerfallsvorgänge hingegen mit  $f(x) = e^{-x}$ .