Rosner

Mathe gut erklärt

Baden-Württemberg
Abitur 2017
Allgemeinbildende Gymnasien

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- sich in den letzten beiden Schuljahren optimal auf Klausuren und auf das Abitur in Mathematik vorzubereiten.
- sich alle Lehrplaninhalte anhand verständlicher und übersichtlicher Stoffzusammenfassungen anzueignen.
- Ihr gewonnenes Wissen anhand von Basisübungen mit ausführlichen Lösungen schnell und prüfungsbezogen zu vertiefen.
- die Abitursaufgaben der vergangenen Jahrgänge zu bearbeiten, da Sie hiermit ein Nachschlagewerk zur Verfügung haben.
- durch Erfolge neue Motivation für das Fach Mathematik zu bekommen.

Liebe Fachkolleginnen und Fachkollegen,

dieses Buch soll Sie dabei unterstützen,

- die zeitintensive Stoffwiederholung, Klausur- und Abiturvorbereitung teilweise aus dem Unterricht auslagern zu können.
- auf diese Weise mehr Zeit für verständnisorientierten Unterricht zu gewinnen.
- sicherzustellen, dass Ihre Schülerinnen und Schüler über ausreichendes Basiswissen verfügen.

1. Funktionen

1.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

<table>
<tr><th>1. Grades (Geraden)</th><th>2. Grades (Parabeln)</th></tr>
<tr>
<td>

Hauptform : $\boldsymbol{y = mx + b}$

Steigung aus 2 Punkten: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

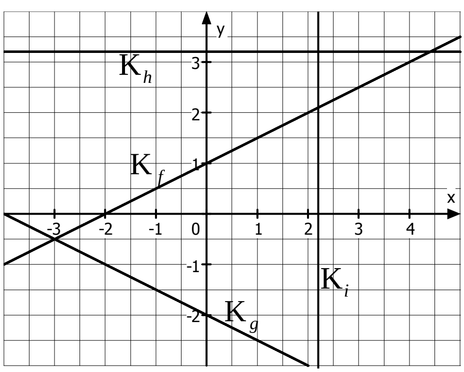
Punkt-Steigungs-Form (PSF):
$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$

Steigungswinkel aus Steigung bestimmen:
$m = \tan(\alpha)$

Parallele Geraden:
$m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)

Senkrechte (orthogonale) Geraden:
Steigungen sind negative Kehrwerte
voneinander: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ bzw. $m_1 \cdot m_2 = -1$

1. Winkelhalbierende: $y = x \quad (m = 1)$
2. Winkelhalbierende: $y = -x \quad (m = -1)$



K_f: $y = 0{,}5x + 1$ K_g: $y = -0{,}5x - 2$
K_h: $y = 3{,}2$ K_i: $x = 2{,}2$

</td>
<td>

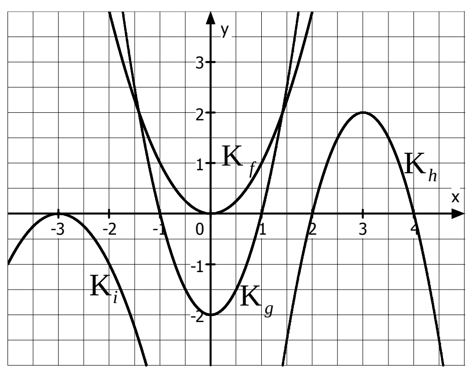
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Scheitelpunkt-Ansatz:
$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s \mid y_s)$

$a > 0$: nach oben geöffnet bzw.
Verlauf von II nach I

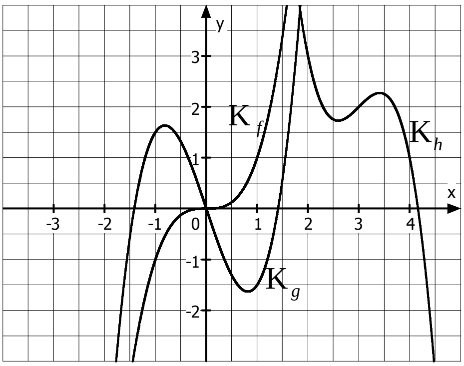
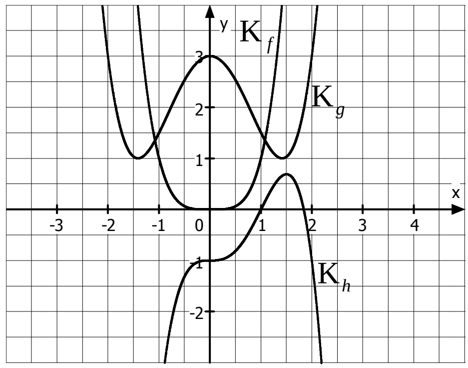
$a < 0$: nach unten geöffnet bzw.
Verlauf von III nach IV

Bei Symmetrie zur y-Achse:
$f(x) = ax^2 + c$ (nur gerade Hochzahlen)

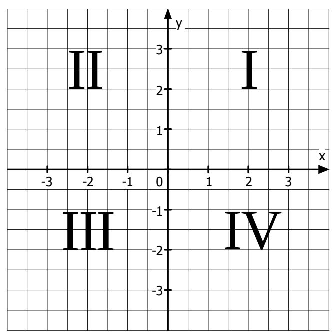


K_f: $f(x) = x^2$ K_g: $g(x) = 2x^2 - 2$
K_h: $h(x) = -2(x-3)^2 + 2$
K_i: $i(x) = -(x+3)^2$

</td>
</tr>
</table>

3. Grades	**4. Grades**
Allg.: $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$	**Allg.:** $\boldsymbol{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$
$a > 0$: Verlauf von III nach I	$a > 0$: Verlauf von II nach I
$a < 0$: Verlauf von II nach IV	$a < 0$: Verlauf von III nach IV
Ansatz bei Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + cx$ (nur ungerade Hochzahlen)	Ansatz bei Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (nur gerade Hochzahlen)
	
K_f: $f(x) = x^3$ K_g: $g(x) = 1{,}5x^3 - 3x$ K_h: $h(x) = -2x^3 + 18x^2 - 53x + 53$	K_f: $f(x) = x^4$ K_g: $g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$ K_h: $h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

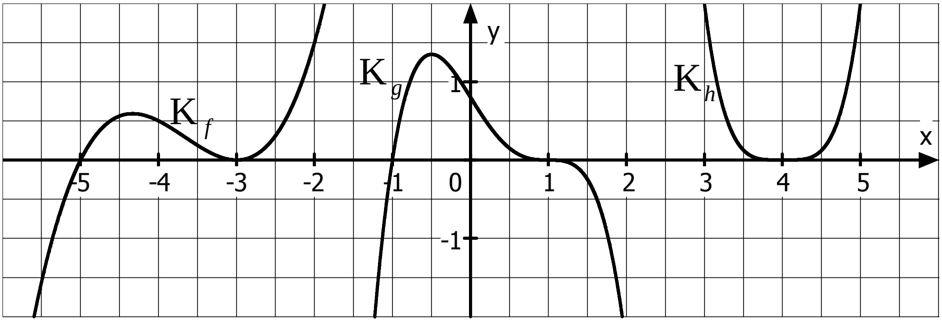
Die Quadranten



Tipp (für alle ganzrationalen Funktionen)
$\boldsymbol{a > 0}$: Verlauf von ... nach **I** („endet **oben**“)
$\boldsymbol{a < 0}$: Verlauf von ... nach **VI** („endet **unten**“)

1.2 Der Nullstellenansatz und die Vielfachheit von Nullstellen

Beispiele



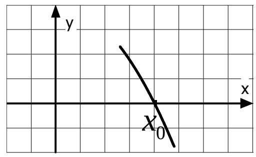
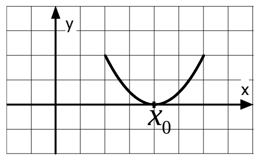
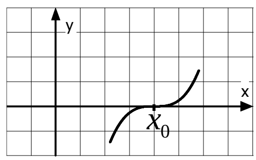
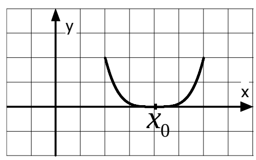
K_f: $f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ K_g: $g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ K_h: $h(x) = 2 \cdot (x-4)^4$

Aufbau des Nullstellenansatzes (am Beispiel)

$$g(x) = -0{,}8 \cdot \left(x+1\right) \cdot \left(x-1\right)^3$$

Verlauf von III nach IV	$x_0 = -1$ ist einfache Nullstelle	$x_{1/2/3} = +1$ ist dreifache Nullstelle

Übersicht (für ganzrationale Funktionen)

Vielfachheit Nullstelle	**Faktor im Nullstellenansatz**	**Skizze**	**Beschreibung**
Einfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0) \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel VZW)
Doppelte Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^2 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW)
Dreifache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^3 \cdot \ldots$		Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit VZW)
Vierfache Nullstelle: x_0	$f(x) = \ldots \cdot (x - x_0)^4 \cdot \ldots$		Schaubild **berührt** x-Achse (ohne VZW) („breiter“ geformt als doppelte Nullstelle)

1.3 Gebrochenrationale Funktionen

Allg. $f(x)=\dfrac{\textit{(ganzrationale) Funktion}}{\textit{(ganzrationale) Funktion}}$ Beispiel: $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{x+2}$ $\left(\text{mit } D=\mathbb{R} \setminus -2\right)$

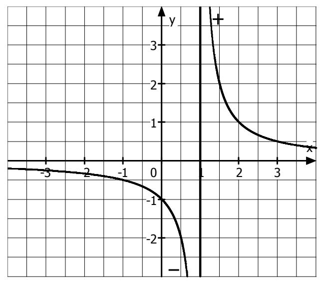
1. Untersuchung auf senkrechte Asymptoten

x-Werte, die im **Nenner** zum **Wert 0** führen, nennt man **Definitionslücken**. Solche *x*-Werte sind nicht in der Definitionsmenge der Funktion enthalten.
An einer Definitionslücke kann das Schaubild eine **senkrechte Asymptote** aufweisen.
(Hinweis: Asymptote = Näherungsgerade)

Fall 1: Polstelle mit Vorzeichenwechel (**einfache** Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\left(\text{mit } D=\mathbb{R} \setminus 1\right)$
Senkrechte Asymptote: $\boldsymbol{x=1}$

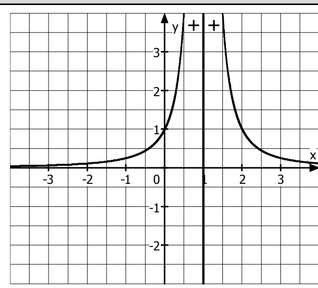
Für $x\to 1\ (x<1)$ gilt: $f(x)\to -\infty$
Für $x\to 1\ (x>1)$ gilt: $f(x)\to +\infty$



Fall 2: Polstelle ohne Vorzeichenwechel (**doppelte** Nullstelle des Nenners)

Beispiel: $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\left(\text{mit } D=\mathbb{R} \setminus 1\right)$
Senkrechte Asymptote: $\boldsymbol{x=1}$

Für $x\to 1\ (x<1)$ gilt: $f(x)\to +\infty$
Für $x\to 1\ (x>1)$ gilt: $f(x)\to +\infty$

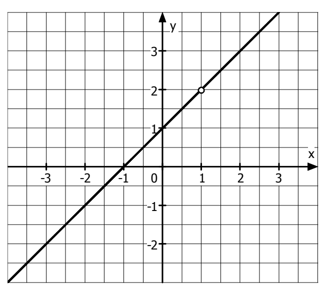


Fall 3 (Ausnahme)**: Keine Polstelle** (**auch** Nullstelle des **Zählers**)

Beispiel: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\left(\text{mit } D=\mathbb{R} \setminus 1\right)$
Keine senkrechte Asymptote (trotz Definitionslücke)

Grund: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=x+1$

Die Definitionslücke ist nach dem Kürzen „verschwunden“. Sie ist also (be-)**hebbar**.
(Wobei die Ausgangsfunktion diese noch immer aufweist, siehe Schaubild.)

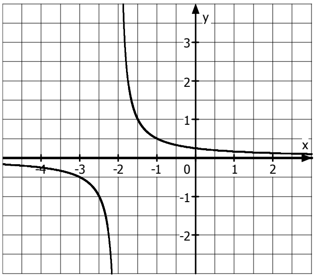


2. Untersuchung auf waagrechte Asymptoten (Verhalten für $x \to \pm\infty$)

Fall 1: Zählergrad < Nennergrad: *x* - Achse ist waagrechte **Asymptote**

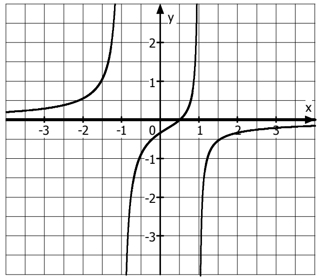
$f(x) = \dfrac{1}{2x+4} \quad \left(\dfrac{\text{Grad } 0}{\text{Grad } 1}\right)$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)



$f(x) = \dfrac{-2x+1}{3x^2-3} \quad \left(\dfrac{\text{Grad } 1}{\text{Grad } 2}\right)$

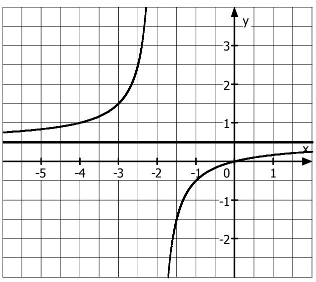
waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)



Fall 2: Zählergrad = Nennergrad: Waagrechte Asymptote

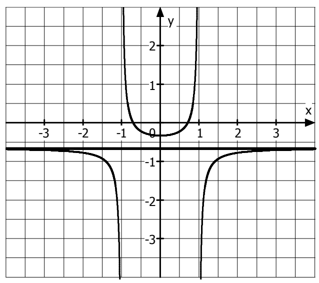
$f(x) = \dfrac{\mathbf{1}x}{\mathbf{2}x+4} \quad \left(\dfrac{\text{Grad } 1}{\text{Grad } 1}\right)$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}}$



$f(x) = \dfrac{\mathbf{-2}x^2+1}{\mathbf{3}x^2-3} \quad \left(\dfrac{\text{Grad } 2}{\text{Grad } 2}\right)$

waagrechte Asymptote: $\boldsymbol{y = -\dfrac{2}{3}}$



Fall 3: Zählergrad > Nennergrad: Keine waagrechte Asymptote.

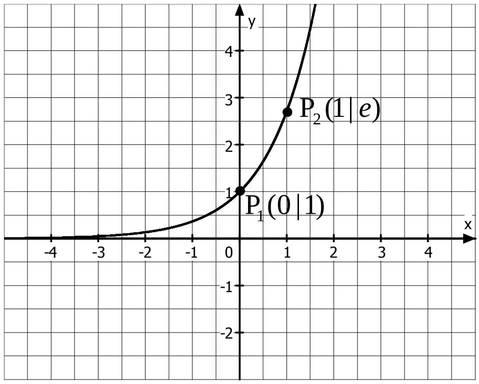
(Keine Beispiele, da nicht relevant für das Abitur.)

Hinweise

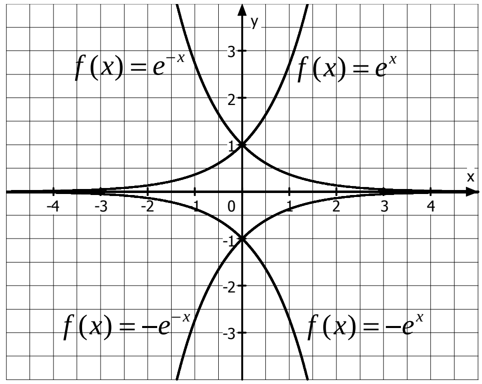
- x-Werte, für die der **Nenner** gleich **0** ist sind **Definitionslücken** $\left(\dfrac{\ldots}{0} = ?\right)$
- x-Werte, für die der **Zähler** gleich **0** ist sind **Nullstellen** $\left(\dfrac{0}{\ldots} = 0\right)$

1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf : $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in : $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)} + d$

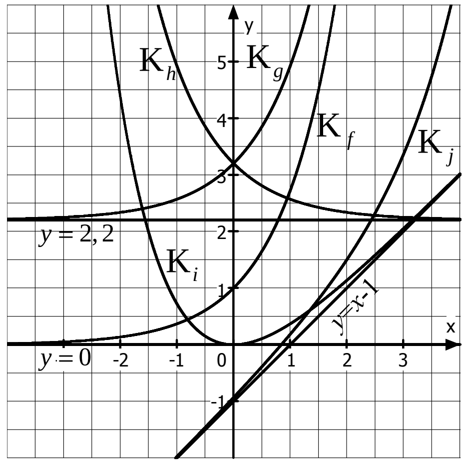
a **- Streckung / Stauchung in *y*-Richtung**	$a > 1$: „steiler“ $0 < a < 1$: „flacher“ ($a < 0$: an der x-Achse gespiegelt)
b **- ansteigendes oder fallendes Schaubild**	$b > 0$: ansteigendes Schaubild $b < 0$: fallendes Schaubild (bzw. an der y-Achse gespiegelt)
c **- Verschiebung in *x*-Richtung**	$c > 0$: nach rechts $c < 0$: nach links
d **- Verschiebung in *y*-Richtung** ($y = d$ ist Asymptote)	$d > 0$: nach oben $d < 0$: nach unten

Vorsicht beim Koeffizienten *c*

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!
Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

4. Asymptoten (Näherungsgeraden)

Beispielfunktion	Asymptote	Schaubilder
$f(x) = e^x$	$y = 0$ (x – Achse) für $x \to -\infty$	
$g(x) = e^x + 2{,}2$	$y = 2{,}2$ für $x \to -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 2{,}2$	$y = 2{,}2$ für $x \to +\infty$	
$i(x) = e^{-x} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \to +\infty$	
$j(x) = 0{,}5e^{x-2} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \to -\infty$	

1. Regel (Asymptotengleichung): $y =$„Exponentialgleichung ohne $e^{\dots x}$“
Man erhält die Asymptotengleichung, indem man die Gleichung der Exponentialfunktion schlicht übernimmt, jedoch hierbei auf den Summanden im Funktionsterm, der $e^{\dots x}$ enthält (dieser strebt gegen 0), verzichtet.

2. Regel (Annäherungsrichtung): Bei $e^{„+x“}$ für $x \to -\infty$ bzw. **bei $e^{„-x“}$ für $x \to +\infty$**
Die Annäherungsrichtung wird durch den Summanden im Funktionsterm, der $e^{\dots x}$ enthält, festgelegt: Steht vor dem x im Exponenten ein Pluszeichen, so nähert sich die Asymptote für große negative x-Werte („links“ im Koordinatensystem) dem Schaubild an.
Steht hier hingegen ein Minuszeichen, so findet die Annäherung bei großen positiven x-Werten („rechts“ im Koordinatensystem) statt.

5. Anwendungen

Wachstumsvorgänge werden oft mit dem Typ $f(x) = e^{„+x“}$ modelliert, Zerfallsvorgänge hingegen mit $f(x) = e^{„-x“}$.