Gruber I Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2021

Übungsbuch für den Pflichtteil im Leistungsfach Mathematik Baden-Württemberg mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Analysis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Pflichtteils (hilfsmittelfreier Teil: HMF) des Mathematik-Abiturs im Leistungsfach ab 2021 in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik sowie angepasste und erweiterte Abituraufgaben seit 2015 in einem Buch. Ab 2021 ist die Struktur des hilfsmittelfreien Teils geändert: Es sind insgesamt maximal 20 Verrechnungspunkte (VP) zu erreichen, davon 10 VP in Analysis (4 Aufgaben a 2,5 VP), 5 VP in Geometrie (2 Aufgaben a 2,5 VP) und 5 VP in Stochastik (2 Aufgaben a 2,5 VP). *Daher haben wir Original-Prüfungsaufgaben teilweise gekürzt oder erweitert und an die neuen Bestimmungen angepasst.* Somit erhalten Sie die bestmögliche Vorbereitung auf die Abiturprüfung.

Der Pflichtteil (HMF) besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung zu lösen sind. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen ☐

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten (4,5 Zeitstunden).
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil (HMF) und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zuerst den Pflichtteil (HMF). Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

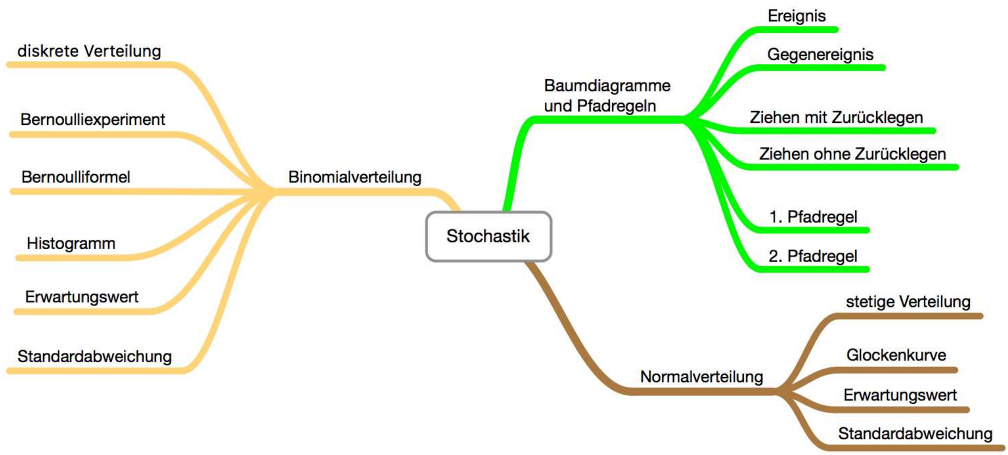
Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erzielt werden, davon 20 VP im Pflichtteil (HMF) und 40 VP im Wahlteil. Aus den Verrechnungspunkten ergeben sich folgende Notenpunkte:

Verrechnungspunkte	Notenpunkte	Note
0 - 11	0	ungenügend
12 - 15	1	mangelhaft
16 - 19	2	
20 - 23	3	
24 - 26	4	ausreichend
27 - 29	5	
30 - 32	6	
33 - 35	7	befriedigend
36 - 38	8	
39 - 41	9	
42 - 44	10	gut
45 - 47	11	
48 - 50	12	
51 - 53	13	sehr gut
54 - 56	14	
57 - 60	15	

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Stochastik



7 Baumdiagramme und Pfadregeln ☐

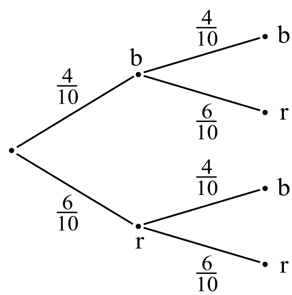
7.1 Ziehen mit Zurücklegen ☐

Tipps ab Seite 107, Lösungen ab Seite 219

In diesem Kapitel geht es darum, mithilfe bereits bekannter Wahrscheinlichkeiten von einzelnen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeiten weiterer, oft «komplizierterer» Ereignisse zu bestimmen. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung hierfür sind *Baumdiagramme*. Sie sind insbesondere bei mehrstufigen Zufallsexperimenten hilfreich. Eine Verzweigung entspricht dabei den möglichen Versuchausgängen der jeweiligen Stufe; längs der «Äste» werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten notiert. Beim Ziehen mit Zurücklegen ändert sich die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug nicht. Manchmal ist es auch geschickt oder hilfreich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A mit der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\bar{A}$ zu berechnen; dies ist vor allem (aber nicht immer) bei den Signalwörtern «mindestens» oder «höchstens» der Fall. Es gilt dann für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Beispiel:
Ein Gefäß enthält 4 blaue und 6 rote Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Da 4 blaue und 6 rote, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für die Ergebnisse blau (b): $\frac{4}{10}$ und für rot (r): $\frac{6}{10}$.
Damit erhält man folgendes Baumdiagramm:



Wichtige Rechenregeln für Baumdiagramme sind die *1. Pfadregel* und die *2. Pfadregel*:
Die 1. Pfadregel (Produktregel) besagt, dass man die Wahrscheinlichkeit längs eines Pfades berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Äste miteinander multipliziert.
Mit der 2. Pfadregel (Summenregel) kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Pfade addiert.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln rot sind, so ergibt sich mithilfe der 1. Pfadregel:

$$\mathrm{P}(\text{«beide Kugeln rot»}) = \mathrm{P}(\mathrm{rr}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0{,}36$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, so ergibt sich mithilfe der 1. und 2. Pfadregel:

$$\mathrm{P}(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) = \mathrm{P}(\mathrm{rr}) + \mathrm{P}(\mathrm{bb}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100} + \frac{16}{100} = \frac{52}{100} = 0{,}52$$

□

Aufgaben:

a) Eine Urne enthält 4 rote, 3 weiße und 2 gelbe Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Es werden eine weiße und eine gelbe Kugel gezogen.
B: Es wird keine weiße Kugel gezogen.

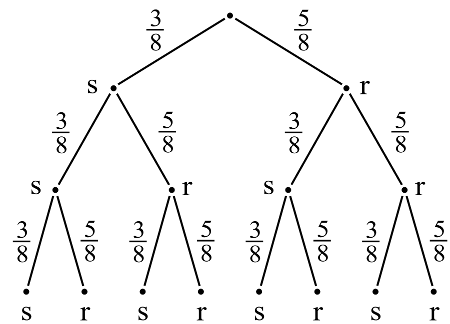
b) Ein Gefäß enthält 8 rote, 4 blaue und 2 weiße Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Es wird keine rote Kugel gezogen.
B: Es wird höchstens eine rote Kugel gezogen.

c) In einem Behälter befinden sich 3 rote und 5 gelbe Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
   I) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln gelb ist.
   II) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, wenn im Behälter 3 rote und eine unbekannte Anzahl gelber Kugeln vorhanden sind und zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

d) In einer Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln. Es ergibt sich das nebenstehende Baumdiagramm.

I) Beschreiben Sie eine Situation, die zu diesem Baumdiagramm passt.

II) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel rot ist.

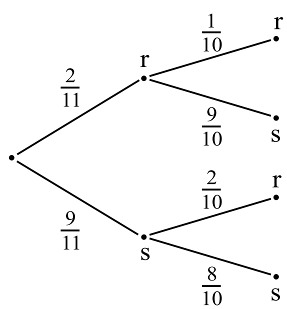


7.2 Ziehen ohne Zurücklegen

Tipps ab Seite 107, Lösungen ab Seite 222

Bei der Erstellung des Baumdiagrammes muss man darauf achten, dass sich bei Stichproben ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jeder Stufe ändern.

Beispiel:
Eine Urne enthält 2 rote und 9 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln gleichzeitig gezogen. Das gleichzeitige Ziehen entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen. Man erhält folgendes Baumdiagramm:



Da 2 rote und 9 schwarze, also insgesamt 11 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{2}{11}$ und für schwarz (s): $\frac{9}{11}$.

Beim 2. Ziehen sind nur noch 10 Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass genau eine Kugel schwarz ist, ergibt sich mithilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$P(\text{«genau eine schwarze Kugel»}) = P(rs) + P(sr) = \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{9}{55} + \frac{9}{55} = \frac{18}{55}$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz

Stochastik

7 Baumdiagramme und Pfadregeln

7.1 Ziehen mit Zurücklegen

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r), weiß (w) und gelb (g). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis A gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen weiß (w) und nicht weiß ($\bar{w}$). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis B gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.

b) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und nicht rot ($\bar{r}$). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis A gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.
Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis B gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis $\overline{B}$ und verwenden Sie $P(B) = 1 - P(\bar{B})$.

c) I) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r) und gelb (g). Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen gleich bleiben. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis gehören und verwenden Sie die Pfadregeln oder rechnen Sie alternativ mit dem Gegenereignis $\overline{A}$ und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

II) Wählen Sie n als Anzahl der gelben Kugeln und überlegen Sie, wie viele Kugeln insgesamt vorhanden sind.

d) I) Überlegen Sie, wie viele Kugeln insgesamt mindestens vorhanden sein müssen und beachten Sie, ob sich die Wahrscheinlichkeiten für rot oder schwarz bei jedem Ziehen ändern oder nicht.

II) Rechnen Sie mit dem Gegenereignis $\overline{A}$ und verwenden Sie $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ sowie die 1. Pfadregel.

7.2 Ziehen ohne Zurücklegen

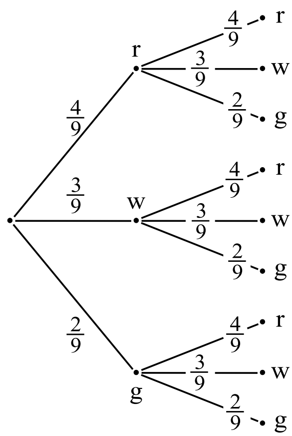
a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen rot (r), grün (g) und blau (b). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welche Ergebnisse zum gesuchten Ereignis A gehören und verwenden Sie die Pfadregeln.
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den Ästen blau (b) und nicht blau ($\bar{b}$). Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen ändern. Überlegen Sie, welches Ergebnis zum gesuchten Ereignis B gehört und verwenden Sie die 1. Pfadregel.

Stochastik

7 Baumdiagramme und Pfadregeln

7.1 Ziehen mit Zurücklegen

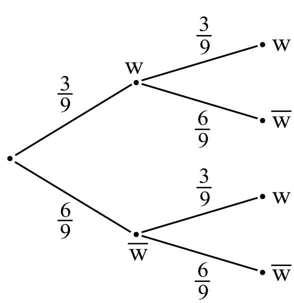
a)



Da 4 rote, 3 weiße und 2 gelbe, also insgesamt 9 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Ziehen für rot (r), weiß (w) bzw. gelb (g): $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{9}$ bzw. $\frac{2}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, eine weiße und eine gelbe Kugel zu ziehen, erhält man mithilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(wg)} + \mathrm{P(gw)} = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{27}$$

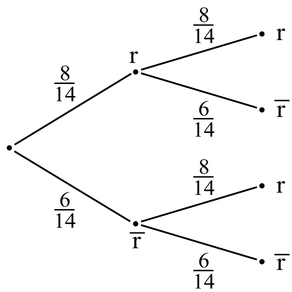


Da 3 weiße und 6 nicht weiße, also insgesamt 9 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für weiß (w): $\frac{3}{9}$ und für nicht weiß ($\bar{\mathrm{w}}$): $\frac{6}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, keine weiße Kugel zu ziehen, erhält man mithilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}(\bar{\mathrm{w}}\bar{\mathrm{w}}) = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$$

b) A:



Da 8 rote und 6 nicht rote, also insgesamt 14 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für rot (r): $\frac{8}{14}$ und für nicht rot ($\bar{\text{r}}$): $\frac{6}{14}$.
Die Wahrscheinlichkeit, keine rote Kugel zu ziehen, erhält man mithilfe der 1. Pfadregel (Produktregel):

$$\text{P}(\text{«keine rote Kugel»}) = \text{P}(\bar{\text{r}}\bar{\text{r}}) = \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$

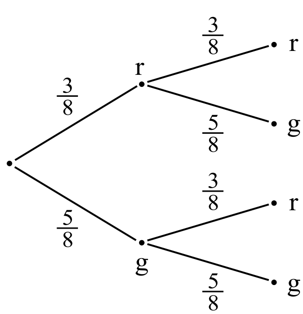
B: Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine rote Kugel zu ziehen, erhält man mithilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}\text{P}(\text{«höchstens eine rote Kugel»}) &= \text{P}(\bar{\text{r}}\bar{\text{r}}) + \text{P}(\bar{\text{r}}\text{r}) + \text{P}(\text{r}\bar{\text{r}}) \\ &= \frac{6}{14} \cdot \frac{6}{14} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{14} + \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{14} \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \\ &= \frac{9}{49} + \frac{12}{49} + \frac{12}{49} \\ &= \frac{33}{49}\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

$$\begin{aligned}\text{P}(\text{«höchstens eine rote Kugel»}) &= 1 - \text{P}(\text{«zwei rote Kugeln»}) \\ &= 1 - \text{P}(\text{rr}) \\ &= 1 - \frac{8}{14} \cdot \frac{8}{14} \\ &= 1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \\ &= \frac{49}{49} - \frac{16}{49} \\ &= \frac{33}{49}\end{aligned}$$

c) I)



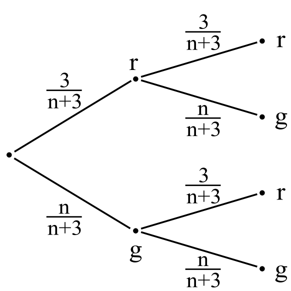
Da 3 rote und 5 gelbe, also insgesamt 8 Kugeln im Behälter sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für gelb (g): $\frac{5}{8}$ und für rot (r): $\frac{3}{8}$.
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine gelbe Kugel zu ziehen, erhält man mithilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(\text{«mindestens eine gelbe Kugel»}) &= P(rg) + P(gr) + P(gg)\\
&= \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\\
&= \frac{15}{64} + \frac{15}{64} + \frac{25}{64}\\
&= \frac{55}{64}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit dem Gegenereignis rechnen:

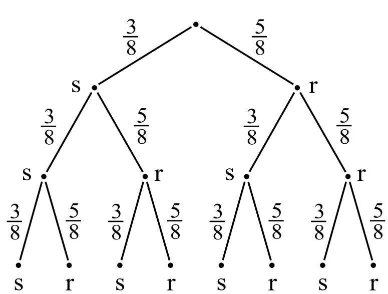
$$\begin{aligned}
P(\text{«mindestens eine gelbe Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine gelbe Kugel»})\\
&= 1 - P(rr)\\
&= 1 - \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\\
&= \frac{64}{64} - \frac{9}{64}\\
&= \frac{55}{64}
\end{aligned}$$

II)



Wenn im Behälter 3 rote und eine unbekannte Anzahl (n) gelber Kugeln vorhanden sind, gibt es insgesamt $n + 3$ Kugeln. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für gelb (g): $\frac{n}{n+3}$ und für rot (r): $\frac{3}{n+3}$.

d) I)



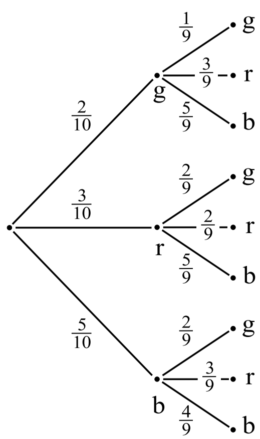
Zum Baumdiagramm passt z.B. folgende Situation:
In einer Urne befinden sich 5 rote und 3 schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen, da die Wahrscheinlichkeiten beim 2. und beim 3. Zug gleich groß sind wie beim 1. Zug.

II) Die Wahrscheinlichkeit beträgt bei jedem Zug für rot (r): $\frac{5}{8}$ und für schwarz (s): $\frac{3}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel rot ist, erhält man am geschicktesten mithilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned}
P(\text{«mindestens eine rote Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine rote Kugel»}) \\
&= 1 - P(\text{sss}) \\
&= 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \\
&= \frac{512}{512} - \frac{27}{512} \\
&= \frac{485}{512}
\end{aligned}$$

7.2 Ziehen ohne Zurücklegen

a)

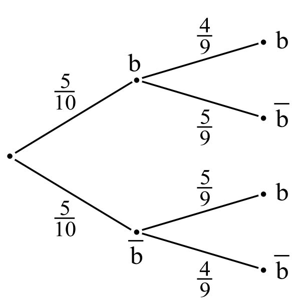


Da 2 grüne, 3 rote und 5 blaue, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für grün (g): $\frac{2}{10}$, für rot (r): $\frac{3}{10}$ und für blau (b): $\frac{5}{10}$.

Danach sind nur noch 9 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine grüne und eine rote Kugel gezogen wird, erhält man mithilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\text{gr}) + P(\text{rg}) \\
&= \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \\
&= \frac{12}{90} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$



Da 5 blaue und 5 nicht blaue, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, betragen die Wahrscheinlichkeiten beim 1. Ziehen für blau (b): $\frac{5}{10}$ und für nicht blau ($\bar{b}$): $\frac{5}{10}$.

Danach sind nur noch 9 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten bei der 2. Ziehung hängen jeweils davon ab, welche Farbe beim 1. Mal gezogen wurde.