Gruber I Neumann

Erfolg in der Mathe-Prüfung 2021

Fachhochschulreife Baden-Württemberg

Übungsbuch mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis einer gut gelaufenen Prüfung! Mit Hilfe dieses Übungsbuchs können Sie sich Schritt für Schritt an die Prüfung heranarbeiten: Der erste Teil besteht aus Aufgaben zum Basiswissen bzw. dem hilfsmittelfreien Teil. Im zweiten Teil finden Sie Musteraufgaben und die Originalaufgaben von 2018, 2019 und 2020.

Der blaue Tippteil und die Lösungen

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie manchmal alternative Lösungswege.

Musteraufgaben und Original-Prüfungsaufgaben

Der letzte Teil des Buchs besteht aus Musteraufgaben, die in Umfang und Schwierigkeit der neuen Prüfung entsprechen und Original-Prüfungsaufgaben. So können Sie sich bestmöglichst auf die eigentliche Prüfung vorbereiten.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.

Bereits durchgearbeitete Kapitel können Sie im Kästchen «abhaken». ☐

Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden.

Daher befinden sich im Buch QR-Codes für die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Tachenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist z.B. auf ein Video zum Erstellen einer Wertetabelle.

frv.tv/da

Allen SchülerInnen, die sich auf die Fachhochschulreife vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

Der Ablauf der Prüfung

Die Mathematikprüfung dauert insgesamt 3 Stunden und 20 Minuten und besteht aus zwei Teilen:

Teil 1

Der «Hilfsmittelfreie Teil», der auch als «Pflichtteil» bezeichnet wird.
Dieser Teil ist ohne Hilfsmittel, d.h. auch ohne Taschenrechner zu bearbeiten. Er besteht aus verschiedenen kurzen Aufgaben. Da Sie diesen Teil verpflichtend bearbeiten müssen, wird er manchmal auch als «Pflichtteil» bezeichnet.

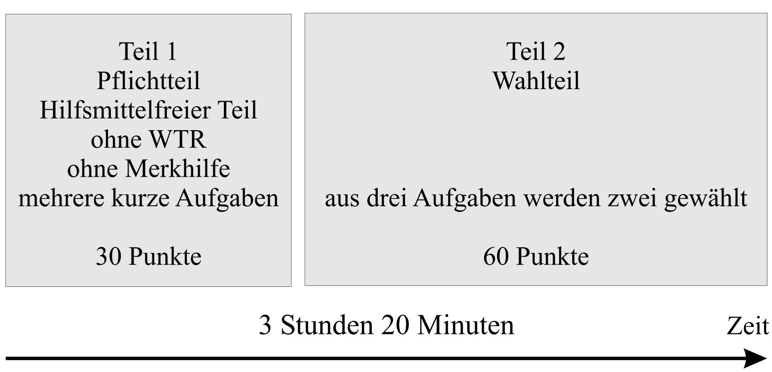
Im Pflichtteil können maximal 30 Punkte erreicht werden.

Teil 2

Der Analysis-Teil, der auch als «Wahlteil» bezeichnet wird.
Für diesen Teil erhalten Sie drei Aufgabenteile, aus denen Sie zwei zur Bearbeitung auswählen, daher wird dieser Teil manchmal als «Wahlteil» bezeichnet.

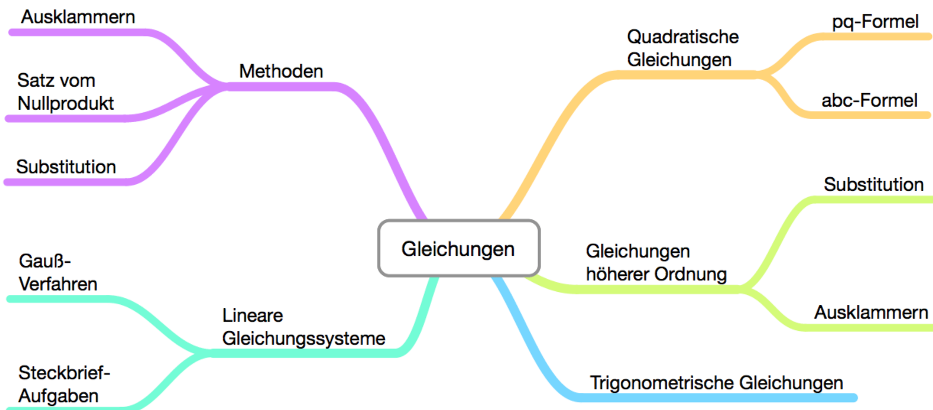
Im Wahlteil können maximal 60 Punkte erreicht werden.

Im Folgenden ist der Ablauf der Prüfung noch einmal grafisch dargestellt:



1 Gleichungen

Tipps ab Seite 43, Lösungen ab Seite 59



Was sind Gleichungen

Die verschiedenen Gleichungen könnte man auch als einen «Werkzeugkasten» bezeichnen: Man braucht sie eigentlich in vielen Gebieten als Hilfsmittel, immer wenn man eine Unbekannte (die in der Regel als x bezeichnet wird) bestimmen will.

Wie man vorgeht, um eine Gleichung zu lösen, kann sehr unterschiedlich sein. Das hängt sehr von der Art der Gleichung ab. Glücklicherweise kann man aber die meisten Gleichungstypen sehr gut voneinander unterscheiden und weiß dann entsprechend, wie man vorzugehen hat

Wo braucht man Gleichungen?

Eigentlich fast überall: Viele mathematische Problemstellungen führen auf eine Gleichung, die man lösen muss, sei es beim Bestimmen einer Nullstelle oder beim Berechnen eines Extremwerts.

1.1 Potenzgleichungen

Bei Potenzgleichungen kommt x als Basis einer Potenz vor, z.B. x^2 oder x^3, im Gegensatz zu Exponentialgleichungen, wo x als Exponent (wie bei e^x) vorkommt.

Bei Gleichungen, in denen x als Quadrat oder höhere Potenz vorliegt, sollten Sie zuerst versuchen, x oder auch x^2 auszuklammern. Geht das nicht, z.B. weil ein absolutes Glied vorliegt, so hilft unter Umständen der Satz vom *Nullprodukt*: «Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren gleich Null ist.» Hierzu setzt man die einzelnen Faktoren gleich Null. Oder man substituiert $x^2 = z$ und löst die entstandene Gleichung nach z auf[1]. Durch Resubstituieren erhält man dann die Lösungen für x. Bei quadratischen Gleichungen hilft entweder die *pq-Formel* oder die *abc-Formel* (Mitternachtsformel) weiter. Sie sollten eine dieser beiden Formeln auswendig können.

Beispiel:
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$. Zuerst wird x ausgeklammert: $x \cdot \left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$. Mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man die Lösung $x_1 = 0$ und aus $x^2 - 5x + 4 = 0$ mit Hilfe der *pq*- oder *abc*-Formel die Lösungen $x_2 = 1$ und $x_3 = 4$.

Aufgaben:
Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\frac{2}{3}x^2 - 6 = 0$ b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ c) $(x-1) \cdot (x-4)^2 = 0$

d) $x^2 \cdot (3x - 6) = 0$ e) $x^3 - 4x = 0$ f) $2x^4 - 3x^3 = 0$

g) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$ h) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ i) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

j) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

1.2 Exponentialgleichungen

Beim Lösen von Exponentialgleichungen gelten die gleichen Regeln, die oben schon erwähnt wurden. Zusätzlich ist zu beachten:

- Der Satz vom Nullprodukt hilft oft weiter, beachten Sie, dass $e^{kx} \neq 0$ ist.
- Es gilt $e^{2x} = (e^x)^2$, sowie $e^0 = 1$ und $\ln 1 = 0$.
- Um eine Exponentialgleichung nach x aufzulösen, wird die Gleichung auf beiden Seiten «logarithmiert», da $\ln(e^z) = z$ ist.
  Beispiel:
  $$\begin{aligned} e^{2x} &= 3 \mid \ln \\ \ln\left(e^{2x}\right) &= \ln(3) \\ 2x &= \ln(3) \\ x &= \frac{\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

[1] Das funktioniert nur, wenn x mit geraden Exponenten vorkommt.

Aufgaben:

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $e^{3x} = 4$
b) $3 \cdot e^{2x} = 12$
c) $6 - 2 \cdot e^{2x} = 0$
d) $8 - 4 \cdot e^{0,5x} = 0$
e) $(2x+4) \cdot \left(e^{2x} - 4\right) = 0$
f) $\left(2x^2 - 2\right) \cdot \left(e^{-x} - 2\right) = 0$
g) $\left(x^2 - 4\right) \cdot e^{0,5x} = 0$
h) $e^{3x} - 3e^x = 0$
i) $e^{5x} = 4e^{2x}$
j) $e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$
k) $e^{2x} - 8 = 2e^x$

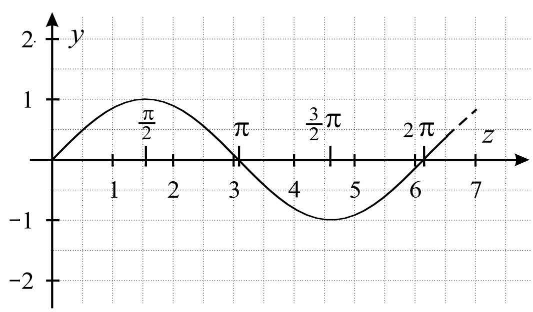
1.3 Trigonometrische Gleichungen ☐

Bei trigonometrischen Gleichungen ist das angegebene Intervall zu beachten.
In jedem Fall ist es hilfreich, sich eine Skizze der zugehörigen Sinusfunktion (bzw. Kosinusfunktion) zu machen. Steht im Argument des Sinus bzw. Kosinus mehr als nur x, geht man wie folgt vor:
Zuerst wird substituiert, dann die entsprechende Gleichung gelöst und zum Schluss wieder resubstituiert. Die Lösungen der Gleichung müssen im angegebenen Intervall liegen.

Beispiel:

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $\sin(2x) = 1;\ \ x \in [0; 2\pi]$.

Die Substitution $2x = z$ führt zu $\sin z = 1$. Um diese Gleichung zu lösen, ist eine Skizze hilfreich:



Die möglichen Lösungen sind $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = \frac{5}{2}\pi$, $z_3 = \frac{9}{2}\pi, \ldots$, da $\sin z$ die Periode $p = 2\pi$ besitzt.
Die Resubstitution $2x = \frac{\pi}{2}$ ergibt $x_1 = \frac{\pi}{4}$, die Resubstitution $2x = \frac{5}{2}\pi$ ergibt $x_2 = \frac{5}{4}\pi$, die Resubstitution $2x = \frac{9}{2}\pi$ ergibt $x_3 = \frac{9}{4}\pi = 2{,}25\pi$. Allerdings liegt die letzte Lösung nicht mehr im angegebenen Intervall $[0; 2\pi]$.
Als Lösungsmenge erhält man also $\mathrm{L} = \left\{ \frac{1}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\}$.

Aufgaben:

Bestimmen Sie für das angegebene Intervall jeweils die Lösungsmenge der Gleichung:

a) $\sin(3x) = 1;\ x \in [0; 2\pi]$

b) $\cos(2x) = -1;\ x \in [0; 2\pi]$

c) $\cos x \cdot (\sin x - 1) = 0;\ x \in [0; \pi]$

d) $\sin x \cdot (\sin x + 1) = 0;\ x \in [0; 2\pi]$

e) $\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0;\ x \in [0; \pi]$

f) $\sin^2 x - 2\sin x = 0;\ x \in [0; 2\pi]$

g) $-3\pi \cdot \sin(\pi x) = 3\pi;\ x \in [0; 2]$

h) $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 2;\ x \in [0; 8]$

i) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0;\ x \in [0; 2\pi]$

j) $\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0;\ x \in [0; 2\pi]$

1.4 Lineare Gleichungssysteme

Um ein lineares Gleichungssystem zu lösen, verwendet man am besten die Gauß-Methode. Dabei muss man in der Regel noch einzelne Gleichungen geschickt mit einer Zahl multiplizieren, dass beim Addieren oder Subtrahieren zweier Gleichungen eine Unbekannte (also x, y oder z) wegfällt.

Aufgaben: Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & - & 5y & - & 4z & = & -12 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\ x & - & y & - & 4z & = & -9 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & 25 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & 2 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & -5 \\ & - & y & + & 4z & = & -3 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\ 2x & & & + & z & = & 8 \\ -3x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ 2x & & & + & 2z & = & -2 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & 2y & - & 6z & = & 4 \\ -3x & & & - & 6z & = & -3 \end{array}$$

1 Gleichungen

1.1 Potenzgleichungen

a) Verwenden Sie die abc-Formel: Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lässt sich mit der abc-Formel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ lösen. Alternativ können Sie diese Gleichung auch umformen und durch Wurzelziehen lösen.

b) Verwenden Sie die abc-Formel .

c) - d) Verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt: Setzen Sie jeden einzelnen Faktor gleich Null und lösen Sie die entstandenen Gleichungen nach x auf.

e) - h) Klammern Sie x oder x^2 oder x^3 aus und bestimmen Sie damit die erste Lösung. Verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt. Eine quadratische Gleichung lösen Sie mit der abc-Formel.

i) - j) Dies sind biquadratische Gleichungen: Substitutieren Sie x^2 durch z. Die quadratische Gleichung lösen Sie mit Hilfe der abc-Formel nach z auf. Durch anschließende Rücksubstitution und Wurzelziehen erhalten Sie die gesuchten Lösungen.

1.2 Exponentialgleichungen

a) - d) Lösen Sie die Gleichungen durch Logarithmieren. Achten Sie darauf, dass Sie zunächst vereinfachen und erst logarithmieren, wenn e^{kx} «isoliert» ist.

e) - g) Verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt: Setzen Sie jeden einzelnen Faktor gleich Null und überlegen Sie, ob Lösungen existieren. Durch Logarithmieren oder Wurzelziehen erhalten Sie Lösungen.

h) - i) Klammern Sie zuerst e^x bzw. e^{2x} aus und verwenden Sie dann den Satz vom Nullprodukt.

j) - k) Substitutieren Sie $e^x = z$ und lösen Sie dann die quadratische Gleichung mit der abc-Formel. Durch anschließende Rücksubstitution von z können Sie x berechnen.

1.3 Trigonometrische Gleichungen

Skizzieren Sie den Verlauf von $\sin x$ bzw. $\cos x$. Achten Sie auf das Lösungsintervall.

a) - b) Substituieren Sie den Term in der Klammer durch z, lösen Sie die Gleichung und resubstituieren Sie wieder.

c) - f) Verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt. Eventuell müssen Sie $\sin x$ ausklammern.

g) - h) Vereinfachen Sie die Gleichung jeweils und substituieren Sie den Term in der Klammer durch z, lösen Sie die Gleichung und resubstituieren Sie wieder.

i) - j) Substituieren Sie $\sin x = z$ bzw. $\cos x = z$, lösen Sie mit Hilfe der abc-Formel die entstandene quadratische Gleichung und resubstituieren Sie wieder.

1.4 Lineare Gleichungssysteme

Wenden Sie das Gaußsche Eliminierungsverfahrens an: Zuerst werden zweimal zwei Gleichungen so zusammengezählt, dass eine Unbekannte wegfällt (eventuell müssen Sie dazu vorher eine Gleichung mit einem Faktor wie -1 oder -2 multiplizieren).
Im nächsten Schritt lösen Sie die beiden Gleichungen, die nur noch zwei Unbekannte enthalten, nach einer Unbekannten auf, indem Sie eine zweite Unbekannte durch geschicktes Addieren und Multiplizieren eliminieren.
Zum Schluss wird schrittweise eingesetzt und die Unbekannten werden bestimmt.

2 Strecken und Geraden

2.1 Länge, Mittelpunkt und Steigung

Die Länge einer Strecke $\overline{\mathrm{PQ}}$ erhalten Sie mit der Längenformel $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\left(x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}}\right)^2 + \left(y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{P}}\right)^2}$, den Mittelpunkt zwischen P und Q mit der Mittelpunktsformel $\mathrm{M}_{\mathrm{PQ}}\left(\frac{x_{\mathrm{P}}+x_{\mathrm{Q}}}{2} \mid \frac{y_{\mathrm{P}}+y_{\mathrm{Q}}}{2}\right)$ und die Steigung mit der Steigungsformel $m_{\mathrm{PQ}} = \frac{y_{\mathrm{Q}}-y_{\mathrm{P}}}{x_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{P}}}$.

2.2 Geradengleichungen

Die Gleichung einer Geraden erhalten Sie mit der Punktsteigungsform $f(x) = m\left(x - x_{\mathrm{P}}\right) + y_{\mathrm{p}}$.

a) - b) Setzen Sie den gegebenen Punkt und die gegebene Steigung in die Punktsteigungsform ein.

c) Berechnen Sie zuerst die Steigung von g_3 mit der Steigungsformel $m_{\mathrm{PQ}} = \frac{y_{\mathrm{Q}}-y_{\mathrm{P}}}{x_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{P}}}$. Anschließend setzen Sie einen gegebenen Punkt und die Steigung in die Punktsteigungsform ein.

d) - e) Beachten Sie, dass parallele Geraden die gleiche Steigung haben. Setzen Sie den gegebenen Punkt und die abgelesene Steigung in die Punktsteigungsform ein.

2.3 Schnittpunkte von Geraden

Den Schnittpunkt zweier Geraden erhalten Sie durch Gleichsetzen der Geradengleichungen. Lösen Sie die entstandene Gleichung nach x auf und setzen Sie den x-Wert in eine der Geradengleichungen ein, um den y-Wert zu bestimmen. Die x-Achse hat die Gleichung $y = 0$.

2.4 Gemischte Aufgaben

a) Bestimmen Sie die gesuchten Längen der drei Seiten des Dreiecks mithilfe der Längenformel $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\left(x_{\mathrm{Q}} - x_{\mathrm{P}}\right)^2 + \left(y_{\mathrm{Q}} - y_{\mathrm{P}}\right)^2}$. Falls zwei Seiten gleich lang sind, handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

1 Gleichungen

1.1 Potenzgleichungen

Die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ lässt sich mit der abc-Formel $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ lösen.

a) Die quadratische Gleichung $\frac{2}{3}x^2-6=0$ lässt sich mit der abc-Formel lösen. Mit $a=\frac{2}{3}$, $b=0$ und $c=-6$ ergibt sich:

$$x_{1,2}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot\frac{2}{3}\cdot(-6)}}{2\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\pm\sqrt{16}}{\frac{4}{3}}=\frac{\pm4}{\frac{4}{3}}=\pm4\cdot\frac{3}{4}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1=4\cdot\frac{3}{4}=3$ und $x_2=-4\cdot\frac{3}{4}=-3$.
Alternativ kann man die gegebene Gleichung auch umformen:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x^2-6&=0\\ \frac{2}{3}x^2&=6\\ 2x^2&=18\\ x^2&=9\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man die Lösungen $x_1=-3$ und $x_2=3$.

b) Die Gleichung $x^2+3x-4=0$ lässt sich mit der pq-oder abc-Formel lösen. Mit $a=1$, $b=3$ und $c=-4$ ergibt sich:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $x_1=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1$ und $x_2=\frac{-3-5}{2}=\frac{-8}{2}=-4$.

c) Die Gleichung $(x-1)\cdot(x-4)^2=0$ löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:
$x-1=0$ führt zur Lösung: $x_1=1$ und $(x-4)^2=0$ bzw. $x-4=0$ führt zur Lösung: $x_2=4$.

d) Die Gleichung $x^2\cdot(3x-6)=0$ löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:
$x^2=0$ führt zur Lösung $x_1=0$ und $3x-6=0$ zur Lösung $x_2=2$.

e) Bei der Gleichung $x^3-4x=0$ kann man x ausklammern: $x\cdot(x^2-4)=0$. Diese Gleichung löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:
$x=0$ führt zur Lösung $x_1=0$ und $x^2-4=0$ führt durch Wurzelziehen zu den Lösungen $x_2=2$ und $x_3=-2$.

f) Bei der Gleichung $2x^4 - 3x^3 = 0$ kann man x^3 ausklammern: $x^3 \cdot (2x - 3) = 0$. Diese Gleichung löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:
$x^3 = 0$ führt zur Lösung $x_1 = 0$ und $2x - 3 = 0$ führt zur Lösung $x_2 = \frac{3}{2}$.

g) Bei der Gleichung $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$ kann man x^2 ausklammern: $x^2 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$. Diese Gleichung löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:
$x^2 = 0$ führt zur Lösung $x_1 = 0$ und $x^2 - 3x + 2 = 0$ führt mit Hilfe der pq- oder abc-Formel zu $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

h) Bei der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ kann man x ausklammern: $x \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$. Diese Gleichung löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:
$x = 0$ führt zur Lösung $x_1 = 0$ und $x^2 - 5x + 6 = 0$ führt mit Hilfe der abc-Formel zu $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$.

i) Bei der Gleichung $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ kann man $x^2 = z$ substituieren: Die Gleichung wird zu $z^2 - 4z + 3 = 0$. Lösen mit Hilfe der abc-Formel ergibt $z_1 = 1$ und $z_2 = 3$. Die Rücksubstitution $x^2 = 1$ führt durch Wurzelziehen zu den Lösungen $x_{1,2} = \pm 1$ und $x^2 = 3$ führt durch Wurzelziehen zu den Lösungen $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

j) Bei der Gleichung $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ führt die Substitution $x^2 = z$ zu $2z^2 - 5z + 2 = 0$. Lösen mit Hilfe der abc-Formel ergibt $z_1 = 2$ und $z_2 = \frac{1}{2}$. Die Rücksubstitution $x^2 = 2$ führt durch Wurzelziehen zu den Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ und $x^2 = \frac{1}{2}$ führt durch Wurzelziehen zu den Lösungen $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

1.2 Exponentialgleichungen

a) Die Gleichung $e^{3x} = 4$ löst man durch Logarithmieren:

$$\begin{aligned} e^{3x} &= 4 \quad | \ln \\ \ln\left(e^{3x}\right) &= \ln(4) \\ 3x &= \ln(4) \\ x &= \frac{\ln(4)}{3} \end{aligned}$$

b) Die Gleichung $3 \cdot e^{2x} = 12$ löst man durch Logarithmieren:

$$\begin{aligned} 3 \cdot e^{2x} &= 12 \quad |: 3 \\ e^{2x} &= 4 \quad\ \ | \ln \\ \ln\left(e^{2x}\right) &= \ln(4) \\ 2x &= \ln(4) \\ x &= \frac{\ln(4)}{2} \end{aligned}$$

c) Die Gleichung $6-2\cdot e^{2x}=0$ löst man durch Logarithmieren:

$$\begin{aligned} 6-2\cdot e^{2x} &= 0 \\ 6 &= 2\cdot e^{2x} \quad |:2 \\ 3 &= e^{2x} \quad\quad |\ \ln \\ \ln(3) &= \ln\left(e^{2x}\right) \\ \ln(3) &= 2x \\ \frac{\ln(3)}{2} &= x \end{aligned}$$

d) Die Gleichung $8-4\cdot e^{0,5x}=0$ löst man durch Logarithmieren:

$$\begin{aligned} 8-4\cdot e^{0,5x} &= 0 \\ 8 &= 4\cdot e^{0,5x} \quad |:4 \\ 2 &= e^{0,5x} \quad\quad |\ \ln \\ \ln(2) &= \ln\left(e^{0,5x}\right) \\ \ln(2) &= 0,5x \\ \frac{\ln(2)}{0,5} &= x \\ 2\cdot\ln(2) &= x \end{aligned}$$

e) Die Gleichung $(2x+4)\cdot\left(e^{2x}-4\right)=0$ löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt: $2x+4=0$ führt zur Lösung: $x_1=-2$ und $e^{2x}-4=0$ führt durch Logarithmieren zur Lösung $x_2=\frac{\ln(4)}{2}$.

f) Die Gleichung $\left(2x^2-2\right)\cdot\left(e^{-x}-2\right)=0$ löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:
$2x^2-2=0$ führt durch Wurzelziehen zu den Lösungen: $x_{1,2}=\pm 1$
$e^{-x}-2=0$ führt durch Logarithmieren zur Lösung $x_3=-\ln(2)$.

g) Die Gleichung $\left(x^2-4\right)\cdot e^{0,5x}=0$ löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt: $x^2-4=0$ führt zu den Lösungen: $x_1=-2$, $x_2=2$. Die Gleichung $e^{0,5x}=0$ besitzt keine weitere Lösung.

h) Die Gleichung $e^{3x}-3e^x=0$ führt durch Ausklammern zu $e^x\cdot\left(e^{2x}-3\right)=0$. Diese Gleichung löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt: $e^x=0$ besitzt keine Lösung und $e^{2x}-3=0$ führt zur Lösung $x=\frac{\ln(3)}{2}$.

i) Die Gleichung $e^{5x}=4e^{2x}$ führt zu $e^{5x}-4e^{2x}=0$ bzw. durch Ausklammern von e^{2x} zu $e^{2x}\cdot\left(e^{3x}-4\right)=0$. Diese Gleichung löst man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt: $e^{2x}=0$ besitzt keine Lösung und $e^{3x}-4=0$ führt zur Lösung $x=\frac{\ln(4)}{3}$.

j) Bei der Gleichung $e^{2x}-6e^x+5=0$ substituiert man $e^x=z$: Wegen $e^{2x}=(e^x)^2$ gilt $e^{2x}=z^2$. Die Gleichung $e^{2x}-6e^x+5=0$ wird damit zu $z^2-6z+5=0$. Lösen mit pq- oder abc-Formel ergibt $z_1=5$ und $z_2=1$. Die Rücksubstitution $e^x=5$ führt zur Lösung $x_1=\ln(5)$, die Rücksubstitution $e^x=1$ führt zur Lösung $x_2=\ln(1)=0$.

k) Die Gleichung $e^{2x}-8=2e^x$ wird umgeformt zu $e^{2x}-2e^x-8=0$. Substituiert man $e^x=z$ ergibt sich: $z^2-2z-8=0$. Lösen mit Hilfe der pq-oder abc-Formel ergibt $z_1=4$ und $z_2=-2$. Die Rücksubstitution $e^x=4$ führt zur Lösung $x=\ln(4)$, die Rücksubstitution $e^x=-2$ führt zu keiner weiteren Lösung, da e^x stets größer als Null ist.

1.3 Trigonometrische Gleichungen

a) Bei der Gleichung $\sin(3x)=1;\ x\in[0;2\pi]$ substituiert man $3x=z$. Dies führt zu $\sin z=1$ mit den möglichen Lösungen $z_1=\frac{\pi}{2}, z_2=\frac{5}{2}\pi, z_3=\frac{9}{2}\pi, \ldots$.
Die Resubstitution $z_1=\frac{\pi}{2}=3x$ ergibt $x_1=\frac{\pi}{6}$, $z_2=\frac{5}{2}\pi=3x$ ergibt $x_2=\frac{5}{6}\pi$,
$z_3=\frac{9}{2}\pi=3x$ ergibt $x_3=\frac{3}{2}\pi$, $z_4=\frac{13}{2}\pi$ ergibt keine weitere Lösung, da $\frac{13}{6}\pi\notin[0;2\pi]$
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L}=\left\{\frac{1}{6}\pi;\frac{5}{6}\pi;\frac{3}{2}\pi\right\}$.

b) Bei der Gleichung $\cos(2x)=-1;\ x\in[0;2\pi]$ substituiert man $2x=z$. Dies führt zu $\cos z=-1$ mit den möglichen Lösungen $z_1=\pi, z_2=3\pi, z_3=5\pi, \ldots$.
Die Resubstitution $z_1=\pi=2x$ ergibt $x_1=\frac{\pi}{2}$, $z_2=3\pi=2x$ ergibt $x_2=\frac{3}{2}\pi$, $z_3=5\pi$ ergibt keine weitere Lösung.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L}=\left\{\frac{1}{2}\pi;\frac{3}{2}\pi\right\}$.

c) Die Gleichung $\cos x\cdot(\sin x-1)=0;\ x\in[0;\pi]$ löst man mit dem Satz vom Nullprodukt:
$\cos x=0$ hat im angegebenen Intervall die Lösung $x=\frac{\pi}{2}$.
$\sin x-1=0$ bzw. $\sin x=1$ hat ebenfalls die Lösung $x=\frac{\pi}{2}$.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L}=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

d) Die Gleichung $\sin x\cdot(\sin x+1)=0;\ x\in[0;2\pi]$ löst man mit dem Satz vom Nullprodukt:
$\sin x=0$ hat im angegebenen Intervall die Lösungen $x_1=0$, $x_2=\pi$ und $x_3=2\pi$.
$\sin x+1=0$ bzw. $\sin x=-1$ hat die Lösung $x_4=\frac{3}{2}\pi$.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L}=\left\{0;\pi;\frac{3}{2}\pi;2\pi\right\}$.

e) Die Gleichung $\cos x\cdot(\cos x+1)=0;\ x\in[0;\pi]$ löst man mit dem Satz vom Nullprodukt:
$\cos x=0$ hat im angegebenen Intervall die Lösung $x_1=\frac{1}{2}\pi$.
$\cos x+1=0$ bzw. $\cos x=-1$ hat die Lösung $x_2=\pi$.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L}=\left\{\frac{1}{2}\pi;\pi\right\}$.

f) Bei der Gleichung $\sin^2 x-2\sin x=0;\ x\in[0;2\pi]$ klammert man $\sin x$ aus. Es ergibt sich: $\sin x\cdot(\sin x-2)=0$.
Diese Gleichung löst man mit dem Satz vom Nullprodukt:
$\sin x=0$ hat im angegebenen Intervall die Lösungen $x_1=0$, $x_2=\pi$ und $x_3=2\pi$.
$\sin x-2=0$ bzw. $\sin x=2$ hat keine weitere Lösung.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L}=\{0;\pi;2\pi\}$.

g) Die Gleichung $-3\pi \cdot \sin(\pi x) = 3\pi;\ x \in [0;2]$ führt zu $\sin(\pi x) = -1$. Man substituiert $\pi x = z$. Dies führt zu $\sin z = -1$ mit den möglichen Lösungen $z_1 = \frac{3}{2}\pi$, $z_2 = \frac{7}{2}\pi$, $z_3 = \frac{11}{2}\pi, \ldots$.
Die Resubstitution $\pi x = \frac{3}{2}\pi$ ergibt $x = \frac{3}{2}$, die Resubstitution $\pi x = \frac{7}{2}\pi$ ergibt keine weitere Lösung, da $\frac{7}{2} \notin [0;2]$.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

h) Die Gleichung $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 2;\ x \in [0;8]$ führt zu $\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 1$. Man substituiert $\frac{\pi}{4}x = z$. Dies führt zu $\cos z = 1$ mit den mögleichen Lösungen $z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi$, $z_3 = 4\pi, \ldots$.
Die Resubstitution $\frac{\pi}{4}x = 0$ ergibt $x_1 = 0$, die Resubstitution $\frac{\pi}{4}x = 2\pi$ ergibt $x_2 = 8$, die Resubstitution $\frac{\pi}{4}x = 4\pi$ ergibt keine weitere Lösung, da $16 \notin [0;8]$.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L} = \{0;8\}$.

i) Bei der Gleichung $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0;\ x \in [0;2\pi]$ substituiert man $\cos x = z$. Damit ergibt sich: $z^2 + z - 2 = 0$.
Mit Hilfe der pq- bzw. abc-Formel erhält man: $z_1 = 1$ und $z_2 = -2$.
Die Resubstitution $\cos x = 1$ ergibt im angegebenen Intervall die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$, die Resubstitution $\cos x = -2$ ergibt keine weiteren Lösungen.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L} = \{0;2\pi\}$.

j) Bei der Gleichung $\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0;\ x \in [0;2\pi]$ substituiert man $\sin x = z$. Damit ergibt sich: $z^2 + 4z + 3 = 0$.
Mit Hilfe der abc-Formel erhält man: $z_1 = -1$ und $z_2 = -3$.
Die Resubstitution $\sin x = -1$ ergibt im angegebenen Intervall die Lösung $x_1 = \frac{3}{2}\pi$, die Resubstitution $\sin x = -3$ ergibt keine weiteren Lösungen.
Als Lösungsmenge erhält man $\mathrm{L} = \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}$.

1.4 Lineare Gleichungssysteme

a) Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ \mathrm{II} & -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ \mathrm{III} & -x & - & 5y & - & 4z & = & -12 \end{array}$$

Addieren von I zu II und I zu III führt zu:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ \mathrm{IIa} & & & 3y & + & z & = & 8 \\ \mathrm{IIIa} & & - & 3y & - & 5z & = & -4 \end{array}$$

Addieren von IIa und IIIa führt zu:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ \mathrm{IIa} & & & 3y & + & z & = & 8 \\ \mathrm{IIIb} & & & & - & 4z & = & 4 \end{array}$$

Aus IIIb folgt: $z=-1$. Einsetzen in IIa ergibt: $3y+(-1)=8 \;\Rightarrow y=3$.
Einsetzen in I ergibt: $x+2\cdot 3-(-1)=8 \;\Rightarrow x=1$.
Die Lösungsmenge ist damit: $\mathrm{L}=\{(1;3;-1)\}$.

b) Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\
\text{II} & x & - & y & - & 4z & = & -9 \\
\text{III} & x & + & 4y & + & 3z & = & 25
\end{array}$$

Multiplikation von I mit (-1) und Addieren zu II und III führt zu:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\
\text{IIa} & & - & 3y & - & 2z & = & -16 \\
\text{IIIa} & & & 2y & + & 5z & = & 18
\end{array}$$

Multiplikation von IIa mit 2 und IIIa mit 3 und Addieren führt zu:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\
\text{IIa} & & - & 3y & - & 2z & = & -16 \\
\text{IIIb} & & & & & 11z & = & 22
\end{array}$$

Aus IIIb folgt: $z=2$. Einsetzen in IIa ergibt: $-3y-2\cdot 2=-16 \;\Rightarrow y=4$.
Einsetzen in I ergibt: $x+2\cdot 4-2\cdot 2=7 \;\Rightarrow x=3$.
Die Lösungsmenge ist damit: $\mathrm{L}=\{(3;4;2)\}$.

c) Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & x & + & y & + & 7z & = & 2 \\
\text{II} & 2x & - & y & - & 3z & = & -5 \\
\text{III} & & - & y & + & 4z & = & -3
\end{array}$$

Multiplikation von I mit (-2) und Addieren zu II führt zu:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & x & + & y & + & 7z & = & 2 \\
\text{IIa} & & - & 3y & - & 17z & = & -9 \\
\text{III} & & - & y & + & 4z & = & -3
\end{array}$$

Multiplikation von III mit (-3) und Addieren zu IIa führt zu:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & x & + & y & + & 7z & = & 2 \\
\text{IIa} & & - & 3y & - & 17z & = & -9 \\
\text{IIIa} & & & & - & 29z & = & 0
\end{array}$$

Aus IIIa folgt: $z=0$. Einsetzen in IIa ergibt: $-3y-17\cdot 0=-9 \;\Rightarrow y=3$. Einsetzen in I ergibt: $x+3+7\cdot 0=2 \;\Rightarrow x=-1$.
Die Lösungsmenge ist damit: $\mathrm{L}=\{(-1;3;0)\}$.

d) Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\ \text{II} & 2x & & & + & z & = & 8 \\ \text{III} & -3x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung II vom 2-fachen von Gleichung I und addiert man das 3-fache von Gleichung I zu Gleichung III, ergibt sich:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\ \text{IIa} & & & 4y & - & 5z & = & 6 \\ \text{IIIa} & & & 7y & - & 4z & = & 20 \end{array}$$

Subtrahiert man das 4-fache von Gleichung IIIa vom 7-fachen von Gleichung IIa, erhält man:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x & + & 2y & - & 2z & = & 7 \\ \text{IIa} & & & 4y & - & 5z & = & 6 \\ \text{IIIb} & & & & & -19z & = & -38 \end{array}$$

Aus IIIb folgt: $z = 2$. Einsetzen in IIa ergibt: $4y - 5 \cdot 2 = 6 \;\Rightarrow y = 4$.
Einsetzen in I ergibt: $x + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 7 \;\Rightarrow x = 3$.
Die Lösungsmenge ist damit: $\mathrm{L} = \{\,(3\,;4\,;2)\,\}$.

e) Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ \text{II} & -x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ \text{III} & 2x & & & + & 2z & = & -2 \end{array}$$

Addiert man Gleichung I zu Gleichung II und subtrahiert man Gleichung III vom 2-fachen von Gleichung I, ergibt sich:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ \text{IIa} & & & 4y & - & 4z & = & 10 \\ \text{IIIa} & & & 4y & - & 4z & = & 10 \end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung IIIa von Gleichung IIa, erhält man:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ \text{IIa} & & & 4y & - & 4z & = & 10 \\ \text{IIIa} & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Aufgrund der wahren Aussage gibt es unendlich viele Lösungen.
Wählt man nun in Gleichung IIa z.B. $z = t$, erhält man: $4y - 4t = 10 \;\Rightarrow\; y = 2{,}5 + t$.
Einsetzen in I ergibt: $x + 2 \cdot (2{,}5 + t) - t = 4 \Rightarrow x = -1 - t$.
Damit ist die Lösungsmenge: $\mathrm{L} = \{(-1-t\,; 2{,}5+t\,; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

f) Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & 2x & + & y & + & z & = & 4 \\
\text{II} & & & 2y & - & 6z & = & 4 \\
\text{III} & -3x & & & - & 6z & = & -3
\end{array}$$

Addiert man das 3-fache von Gleichung I zum 2-fachen von Gleichung III, ergibt sich:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & 2x & + & y & + & z & = & 4 \\
\text{II} & & & 2y & - & 6z & = & 4 \\
\text{IIIa} & & & 3y & - & 9z & = & 6
\end{array}$$

Subtrahiert man das 2-fache von Gleichung IIIa vom 3-fachen von Gleichung II, erhält man:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{I} & 2x & + & y & + & z & = & 4 \\
\text{II} & & & 2y & - & 6z & = & 4 \\
\text{IIIa} & & & & & 0 & = & 0
\end{array}$$

Aufgrund der wahren Aussage gibt es unendlich viele Lösungen.
Wählt man nun in Gleichung II z.B. $z = t$, erhält man: $2y - 6t = 4 \Rightarrow y = 2 + 3t$.
Einsetzen in I ergibt: $2x + 2 + 3t + t = 4 \Rightarrow x = 1 - 2t$.
Damit ist die Lösungsmenge: $\mathrm{L} = \{(1 - 2t\,;\, 2 + 3t\,;\, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.