Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Vergleichsarbeiten

Das vorliegende Übungsheft ist speziell auf die Anforderungen der Vergleichsarbeiten Anfang der 9. Klasse in Baden-Württemberg abgestimmt. Es umfasst alle Themen und Kompetenzen, die in Klasse 7 und 8 behandelt wurden und bietet daher eine ideale Vorbereitung auf die Vergleichsarbeit sowie eine Wiederholung und Vertiefung der Inhalte und Methoden.
Die 48 Lernkarten sollen diesen Lernprozess auf einfache Weise unterstützen.
Zu Beginn jedes Kapitels gibt es eine kleine Einführung mit Beispielen und anschließenden Übungsaufgaben. Das Übungsheft ist eine Hilfe zum Selbstlernen, um sich selbständig auf die Vergleichsarbeiten vorzubereiten.

Wie arbeitest du mit diesem Buch?

Die sogenannten Leitideen bezeichnen verschiedene Bereiche der Mathematik. Nach diesen Leitideen sind die Kapitel im Buch aufgeteilt. Die einzelnen Kapitel im ersten Teil des Heftes können unabhängig voneinander bearbeitet werden.
In der Mitte des Heftes ist der blaue Tippteil mit Denk-und Lösungshilfen.

Die Aufgaben in der Vergleichsarbeit sind meist etwas anders gestellt als in der Schule. Oft wirst du auf so genannte «Multiple Choice» Fragen treffen, das sind Fragen, bei denen mehrere Antworten vorgegeben sind und bei denen die richtigen Antworten angekreuzt werden müssen. Um so eine Aufgabe zu bearbeiten, gehst du nicht anders vor als bei einer «normalen» Aufgabe. Berechne dein Ergebnis, wie du es sonst auch machen würdest und vergleiche es dann mit den vorgegebenen Antworten.

Die Aufgaben in der Vergleichsarbeit sind *nicht* nach ansteigendem Schwierigkeitsgrad geordnet, sondern etwas «durcheinander». Wenn dir eine Aufgabe zu schwierig vorkommt, bearbeite sie erst mal nicht, sondern beginne mit den Aufgaben, die du gut kannst.

Die Änderungen ab 2009

Ab 2009 ändert sich die Vergleichsarbeit: Die Mathematikarbeit besteht dann aus zwei Teilen: Einem ersten Teil, der ganz ohne Taschenrechner geschrieben wird und einem zweiten Teil, bei dem du den Taschenrechner verwenden darfst. Außerdem wird die Arbeit etwas länger: Die reine Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten. Die restliche Zeit einer Doppelstunde sollte für Vor- und Nachbereitung genutzt werden.

Der blaue Tippteil

Wenn du an einer Aufgabe sitzt und gar nicht weißt, wo der Ansatz ist, hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buchs weiter: Dort steht zu jeder Aufgabe ein Ansatz, der dir hilft, ohne dass gleich schon die Lösung verraten wird.

Die Lernkarten

Wozu braucht man in der Mathematik Vokabelkarten, ist das nicht eher was für Englisch oder Französich?

Auch in der Mathematik muss man manche Dinge einfach wissen: Zum Beispiel, wie man aufrundet, wie eine Geradengleichung aussieht oder wie man eine Parabel bestimmt. Die 48 Lernkarten im Buch sind dafür eine hervorragende Gedächtnisstütze.

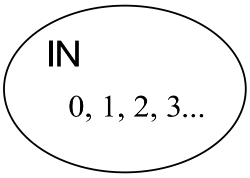
Viel Erfolg wünschen Helmut Gruber und Robert Neumann

1 Zahlen und Rechnen

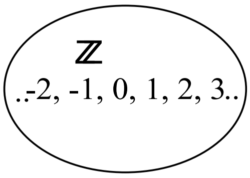
Tipps ab Seite 27, Lösungen ab Seite 33

1.1 Zahlen und Zahlenmengen

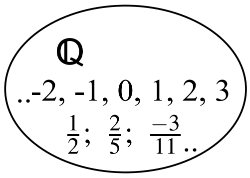
Es gibt verschiedene Zahlenarten, z.B. ganze Zahlen, Brüche, Wurzeln, usw., die als *Zahlenmengen* bezeichnet werden. Die Menge der natürlichen Zahlen kann man erweitern zu den ganzen Zahlen, bei denen positive und negative Vorzeichen vorkommen. Teilt man ganze Zahlen durcheinander, so kommt man zu den rationalen Zahlen (Brüchen). Daneben gibt es noch die irrationalen Zahlen, wie z.B. nicht «aufgehende» Wurzeln oder die Kreiszahl π, die sich nicht als Brüche darstellen lassen. Alle Zahlen werden in der Menge der reellen Zahlen zusammengefasst:



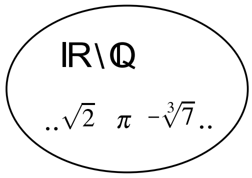
natürliche Zahlen



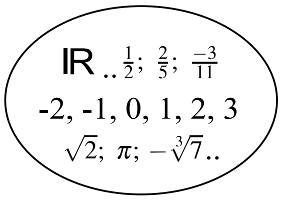
ganze Zahlen



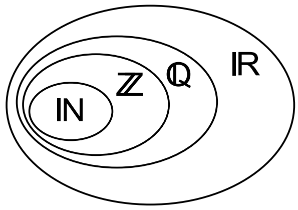
rationale Zahlen



irrationale Zahlen



reelle Zahlen



die ineinanderliegenden Zahlenmengen

- Alle rationalen Zahlen können durch Brüche dargestellt werden, die irrationalen nicht.
- Wenn man einen Bruch in eine Dezimalzahl durch Teilen umrechnet, «geht das Ergebnis auf» oder die Zahlen nach dem Komma wiederholen sich irgendwann periodisch. Diese Wiederholung wird durch das Periodensymbol – eine Linie über den sich wiederholenden Zahlen – beschrieben. Beispiele:
  $\frac{3}{5} = 0,6$ $\quad \frac{1}{3} = 0,3333.... = 0,\overline{3}$ $\quad \frac{1}{6} = 0,1666... = 0,1\overline{6}$ $\quad \frac{2}{11} = 0,181818... = 0,\overline{18}$
- Abrunden und Aufrunden: Wenn man eine Zahl näherungsweise angibt, so muss man runden. Will man auf zwei Stellen nach dem Komma runden, so muss man die dritte Stelle nach dem Komma beachten: Ist diese kleiner als 5 (0-4), wird abgerundet, ist diese größer oder gleich 5 (5-9), wird aufgerundet. Beispiele:
  $3,132 \approx 3,13 \quad 1,4549 \approx 1,45 \quad 34,768 \approx 34,77 \quad 13,496 \approx 13,50$
- Irrationale Zahlen sind Zahlen, die man nicht exakt durch Brüche ausdrücken kann. Sie entstehen z.B. beim Wurzelziehen. Ihre Dezimalstellen wiederholen sich nicht periodisch, z.B. $\sqrt{2} \approx 1,414213562...$
  Die bekannteste irrationale Zahl ist die Zahl π («Pi»), die man zur Kreisberechnung braucht. Inzwischen kennt man von dieser Zahl die ersten 65 Milliarden Stellen hinter dem Komma!

Aufgaben

a) Schreibe folgende Zahlen als Dezimalzahl und verwende das Periodensymbol, wenn nötig:
$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{4}{15}$

b) Schreibe als Dezimalzahl und runde auf zwei Stellen hinter dem Komma:
$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{5}{11}$

c) Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

$1{,}\overline{371}$ ist eine irrationale Zahl	☐ richtig ☐ falsch
-3 ist eine ganze Zahl	☐ richtig ☐ falsch
Das Quadrat jeder reellen Zahl ist eine ganze Zahl	☐ richtig ☐ falsch
$\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl	☐ richtig ☐ falsch
$\sqrt{5}$ ist eine reelle Zahl	☐ richtig ☐ falsch

1.2 Rechnen mit Zahlen und Termen

- *Addieren* darf man nur «Gleiches zu Gleichem». Beispiele:
  $3x + 4x = 7x$
  $2x^2 + 3x^2 + 2x = 5x^2 + 2x$
- Ein Minuszeichen vor einer Klammer dreht alle Vorzeichen in der Klammer um. Beispiel:
  $-(3x - 4) = -3x + 4$
- *Klammern ausmultiplizieren*: Jeder Term in der Klammer wird mit dem Faktor vor der Klammer multipliziert. Beispiele:
  $a\,(x + 2y) = a \cdot x + a \cdot 2y = ax + 2ay$
  $x\,(3b + x) = x \cdot 3b + x \cdot x = 3bx + x^2$
- *Ausklammern:* Kommt eine Zahl oder Variable in jedem Term vor, kann man sie vor die Klammer ziehen. Beispiele:
  $3x + ax = x\,(3 + a)$
  $ax - 2ay + a^2 = a\,(x - 2y + a)$
  $4x + 6y = 2 \cdot (2x + 3y)$
- Wurzelausdrücke kann man vereinfachen, wenn in der Zahl unter der Wurzel eine Quadratzahl enthalten ist. Diese Quadratzahl kann man dann «herausziehen»: z.B. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

Aufgaben

a) Vereinfache folgende Terme:
I) $x^3 - 3x + x^2 - \left(x^3 - x^2\right)$ II) $a^2 - a + b - b^2 - b + b^2$ III) $a\,(a - b) + ab - b$

b) Der Term $x + y + x + x + y + y$ wurde vereinfacht.
Kreuze an, welche Ergebnisse richtig sind:

$3xy$	☐ richtig ☐ falsch
$2y + 3x + y$	☐ richtig ☐ falsch
$6xy$	☐ richtig ☐ falsch
$3x + 3y$	☐ richtig ☐ falsch
$x^3 + y^3$	☐ richtig ☐ falsch

c) Klammere aus:
I) $2a - ab$ II) $xy + x$ III) $x^2 - x$ IV) $ax - ay$

d) Nachfolgend sind einige Rechnungen angegeben: Markiere eventuell vorhandene Fehler und schreibe in diesem Fall das richtige Ergebnis daneben.

$2\,(x + 2) - 3 = 2x + 1$	☐ richtig ☐ falsch	
$6 - 2(x - 2) = 2 - 2x$	☐ richtig ☐ falsch	
$-2(-2 - x) - x = 4 - 3x$	☐ richtig ☐ falsch	

e) Gegeben ist der Term $-3-2b^2$.

I) Berechne den Wert des Terms für $b=\frac{1}{2}$.

II) Für welchen Wert von b nimmt der Term den Wert -21 an?

f) Vereinfache:

I) $\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{75}$ II) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{10}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$ III) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{6}$

1.3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

- Jede Umformung, die man mit einer Gleichung macht (addieren, subtrahiern, multiplizieren, dividieren), muss immer auf beiden Seiten gemacht werden. Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x+7 &= 15-x && \mid +x \\ 4x+7 &= 15 && \mid -7 \\ 4x &= 8 && \mid :2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Zuerst wird x addiert und 7 abgezogen, um die Gleichung zu ordnen.
Zum Schluss wird durch 2 geteilt, um x zu isolieren.

- Mit Ungleichungen kann man rechnen wie mit Gleichungen, nur dreht sich das Ungleichungszeichen bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl um. Beispiel:

$$\begin{aligned} 3-x &\leqslant -2 && \mid -3 \\ -x &\leqslant -5 && \mid \cdot(-1) \\ x &\geqslant 5 \end{aligned}$$

Zuerst wird -3 abgezogen, um die Gleichung zu ordnen.
Anschließend wird mit (-1) multipliziert, dabei dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Aufgaben

a) Löse die Gleichung nach der Variablen auf:

I) $x+2=3x-6$ II) $3(x+1)=7-x$ III) $4(a-2)=5a-2$

b) Löse die Ungleichung:

I) $4-b\geqslant 2$ II) $2(x-1)\leqslant 1$ III) $-(a-3)+2>1$

1.4 Gleichungssysteme mit zwei Variablen

- Bei einem Gleichungssystem gehören die Gleichungen immer zusammen und dürfen in der Regel nicht «jede für sich» gelöst werden. Dies kann durch einen senkrechten Strich links neben den Gleichungen oder das «Und»-Zeichen $\wedge$ gekennzeichnet werden:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 7 \\ 4x & - & 5 & = & y \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad 2x+y=7 \wedge 4x-5=y$$

Die Lösungen werden als «Lösungsmenge» geschrieben: $\mathrm{L}=\{(\mathrm{x};\mathrm{y})\}=\{(2;3)\}$

- Es gibt verschiedene Lösungswege. In allen Fällen bestimmt man zuerst eine Variable und setzt diese dann in eine der beiden Gleichungen ein, um die andere Variable zu bestimmen. Welches Verfahren man benutzt, hängt davon ab, wie die Ausgangssituation aussieht.

  – Das *Einsetzungs*verfahren
  Hierbei wird eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und in die andere eingesetzt. Diese Methode bietet sich an, wenn bei einer Gleichung die eine Variable «alleine» steht. Beispiel:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 7 \\ 4x & - & 5 & = & y \end{array} \right.$$

$4x-5=y$ wird in die obere Gleichung eingesetzt und die Gleichung nach x aufgelöst.

$$\begin{aligned}
2x+(4x-5) &= 7 && \mid \text{einsetzen}\\
6x-5 &= 7 && \mid +5\\
6x &= 12 && \mid :6\\
x &= 2 &&\\
2\cdot 2+y &= 7 &&\\
4+y &= 7 && \mid -4\\
y &= 3 &&
\end{aligned}$$

Einsetzen von $x=2$ in die obere Gleichung um y zu erhalten.
Die Lösungsmenge ist damit $\mathrm{L}=\{(2;3)\}$

- Das *Gleichsetzungs*verfahren
  Beide Gleichungen werden gleichgesetzt. Diese Methode bietet sich an, wenn die gleiche Variable in beiden Gleichungen «alleine» steht. Beispiel:

$$\left|\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 7 & = & y\\ 3 & + & x & = & y \end{array}\right.$$

Die beiden Gleichungen werden gleichgesetzt und die entstehende Gleichung nach x aufgelöst.

$$\begin{aligned}
3x+7 &= 3+x && \mid -x\\
2x+7 &= 3 && \mid -7\\
2x &= -4 && \mid :2\\
x &= -2 &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\cdot(-2)+7 &= y\\
-6+7 &= y\\
1 &= y
\end{aligned}$$

Einsetzen von $x=-2$ in die obere Gleichung, um y zu erhalten.
$\mathrm{L}=\{(-2;1)\}$

- Das *Addititions*verfahren
  Hierbei werden beide Gleichungen so addiert, dass eine Variable wegfällt. Um dies zu erreichen muss man eventuell «geschickt» multiplizieren. Beispiel:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2\\ -2x & - & 5y & = & -1 \end{array}\right.$$

Die obere Gleichung wird mit 2 multipliziert, weil so bei der Addition der beiden Gleichungen x wegfällt.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2y & = & 4\\ +(-2x & - & 5y & = & -1)\\ \hline & - & 3y & = & 3 \end{array}$$

Nun werden beide Gleichungen addiert.

$$\begin{aligned}
-3y &= 3 \mid :(-3)\\
y &= -1
\end{aligned}$$

Zunächst wird y ausgerechnet

$$\begin{aligned}
x+(-1) &= 2 \mid +1\\
x &= 3
\end{aligned}$$

Einsetzen von $y=-1$ in die obere Gleichung, um x zu erhalten. $\mathrm{L}=\{(3;-1)\}$

- Beim Lösen von Gleichungssystemen können drei verschiedene Fälle auftreten:
  - Beide Variablen lassen sich bestimmen; dann gibt es *genau eine* Lösung, die aus einem Zahlenpaar $(x;y)$ besteht.
  - Es tritt beim Lösen eine wahre Aussage wie $0=0$ auf; dann ist die eine Gleichung ein Vielfaches der anderen Gleichung und es gibt *unendlich viele* Lösungen.
  - Es tritt beim Lösen ein Widerspruch wie z.B. $0=3$ auf; dann gibt es *keine Lösung* für das Gleichungssystem.

Aufgaben

a) Löse die folgenden Gleichungssysteme, benutze dafür das Lösungsverfahren, das am besten passt.

I) $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3 &= y \end{aligned}$ II) $\begin{aligned} 4a + b &= -4 \\ -4a - 2b &= 0 \end{aligned}$ III) $\begin{aligned} b - 4 &= a \\ 8 - b &= a \end{aligned}$

IV) $\begin{aligned} a + b &= 3 \\ 2a + 3b &= 11 \end{aligned}$ V) $\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ x - 4 &= y \end{aligned}$ VI) $\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 6x - y &= 5 \end{aligned}$

b) Gegeben ist die Gleichung $x+y=4$. Gib eine zweite Gleichung mit entsprechender Begründung an, so dass das entstehende Gleichungssystem

I) unendlich viele Lösungen hat. II) unlösbar ist.

1.5 Quadratische Gleichungen

- Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2+bx+c=0$ (abc-Form) oder $x^2+px+q=0$ (pq-Form).
- Die abc-Form wird mit Hilfe der abc-Formel gelöst: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
  Die pq-Form wird mit Hilfe der pq-Formel gelöst: $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
- Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung hängt vom Term unter der Wurzel, der «Diskriminanten» ab:
  Es gibt zwei Lösungen für $b^2-4ac>0$ bzw. $\frac{p^2}{4}-q>0$.
  Es gibt eine Lösung für $b^2-4ac=0$ bzw. $\frac{p^2}{4}-q=0$.
  Es gibt keine reelle Lösung für $b^2-4ac<0$ bzw. $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Beispiel
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^2-3x+1=0$.

- Verwendet man die abc-Formel, bestimmt man zuerst $a=2$, $b=-3$, $c=1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2} \\ &= \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} \\ &= \frac{3\pm1}{4} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{3+1}{4}=1 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{3-1}{4}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Werte von a, b, und c werden in die Gleichung eingesetzt. Dabei muss man vor allem auf die Vorzeichen achten.

- Verwendet man die pq-Formel, muss man zuerst die Gleichung durch den Faktor vor x^2 teilen und man erhält: $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$. Anschließend bestimmt man $p=-\frac{3}{2}$ und $q=\frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\left(\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{4}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{\frac{9}{4}}{4}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{8}{16}} \\ &= \frac{3}{4}\pm\frac{1}{4} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Werte von p, und q werden in die Gleichung eingesetzt. Dabei muss man vor allem auf die Vorzeichen achten.

Aufgaben

a) Löse folgende Gleichungen:
I) $x^2 + x - 12 = 0$ II) $4x^2 = 2 \cdot (x+1)$ III) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$

b) Für welchen Wert von t $(t \neq 0)$ hat die Gleichung $x^2 + 4x + t = 0$ genau eine Lösung ?

c) Die Seiten eines Rechtecks unterscheiden sich um 3 cm. Der Flächeninhalt beträgt 108 cm^2. Bestimme die zugehörigen Seitenlängen.

1.6 Textaufgaben

Gleichungen können verwendet werden, um Textaufgaben zu lösen. Dabei kommt es darauf an, dass man den Zusammenhang, der im Text beschrieben wird, in Zahlen bzw. Termen ausdrückt. Das Aufstellen der Gleichungen ist meist die größte Hürde. Ist diese erst einmal aufgestellt, lässt sich die Aufgabe meist leicht lösen.

Beispiel:

Sarah hat vier Münzen mehr als Maren.
Bei einer Gleichung müssen beide Seiten *gleich* sein, also kann man schreiben:

Sarahs Münzenanzahl (s) = Marens Münzenanzahl (m) + 4 Münzen wird zu: $s = m + 4$

oder du setzt an:

Sarahs Münzenanzahl (s) − 4 Münzen = Marens Münzenanzahl (m) wird zu: $s - 4 = m$

Aufgaben

a) Nici und Tobi vergleichen ihre Sammelkarten. Dabei hat Nici x Karten und Tobi y Karten.

I) Nici hat 4 Karten mehr als Tobi. Welche der folgenden Gleichungen beschreibt den Sachverhalt korrekt?

$x + y = 4$	☐ richtig ☐ falsch
$x - y = 4$	☐ richtig ☐ falsch
$x = y + 4$	☐ richtig ☐ falsch
$x - y - 4 = 0$	☐ richtig ☐ falsch

II) Wenn Nici 2 Karten weglegt, hat sie halb so viele Karten wie Tobi.
Welche der folgenden Gleichungen beschreibt den Sachverhalt korrekt?

$x - 2 = \frac{1}{2} \cdot y$	☐ richtig ☐ falsch
$y - 2 = \frac{1}{2} \cdot x$	☐ richtig ☐ falsch
$2(x-2) = y$	☐ richtig ☐ falsch
$x - 2 = 2 \cdot y$	☐ richtig ☐ falsch

b) 26 Packungen Kaffee sollen so in zwei Pakete gepackt werden, dass in einem Paket 8 Packungen mehr sind als in dem anderen. Wie viele Packungen sind in jedem Paket?

c) Denke dir eine Zahl, verdreifache sie und multipliziere das Ergebnis mit 4. Ziehe nun das Doppelte der ursprünglich gedachten Zahl ab.

I) Welche Zahl ergibt sich?

II) Schreibe den Weg «mathematisch» als Formel auf.

III) Erkläre, wie das Ergebnis zustande kommt.

d) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden, ungeraden Zahlen beträgt 75. Wie lauten die Zahlen?

1.7 Prozentrechnung

- Der Ausdruck Prozent kommt aus dem Lateinischen und bedeutet übersetzt «von hundert». Es geht also beim Rechnen mit Prozenten immer um das Rechnen mit Hundertsteln. 80 % sind damit $\frac{80}{100}$.
- Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Prozentaufgabe zu lösen: Enweder mit dem *Dreisatz*, mit Hilfe der *Prozentformel* oder mit Hilfe von *Verhältnisgleichungen*. Alle Wege führen zum Ziel. Du solltest den Weg auswählen, mit dem du am besten rechnen kannst.
- Oft führt das Rechnen mit dem *Wachstumsfaktor q* zu einem schnellen Ergebnis. Es gilt $q = 1 + \frac{p}{100}$, wobei p der Prozentsatz ist. Ein Zuwachs von 25 % entspricht der Multiplikation mit dem Wachstumsfaktor $q = 1{,}25$.

Beispiel:

In einer Schulklasse sind unter 27 Schülern 15 Jungs. Wieviel Prozent sind das?

- Lösung über den *Dreisatz*:

$$\begin{aligned} \text{27 Schüler} &\;\widehat{=}\; 100\,\% && \mid :27 \\ \text{1 Schüler} &\;\widehat{=}\; \tfrac{100}{27}\,\% && \mid \cdot 15 \\ \text{15 Schüler} &\;\widehat{=}\; \tfrac{100\cdot 15}{27}\,\% \approx 55{,}6\,\% \end{aligned}$$

Überlege, was 100 % entspricht. Dann berechnest du, wieviel Prozent einem Schüler entsprechen, indem du durch 27 teilst. Zum Schluss muss mit 15 multipliziert werden, da ja gefragt ist, wie viel Prozent 15 Schülern entsprechen.

- Lösung mit der *Prozentformel*:
  Für die Rechnungen beim Prozentrechnen gilt die Grundformel:

Prozentwert gleich Grundwert mal Prozentsatz.

$$\mathrm{P} = \mathrm{G}\cdot p\,\% \quad \text{bzw. } \mathrm{P} = \mathrm{G}\cdot \frac{p}{100}$$

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{\mathrm{P}\cdot 100}{\mathrm{G}} \\ p &= \tfrac{15\cdot 100}{27} \\ p &\approx 55{,}6 \end{aligned}$$

Da nach dem Prozentsatz gefragt ist, musst du die Formel zunächst nach p umstellen.

Dann einsetzen: Der Grundwert G ist 27, der Prozentwert P ist 15.

- Lösung mit *Verhältnisgleichungen*:
  Die Gleichung lautet: «15 verhält sich zu 27, wie x zu 100»

$$\begin{aligned} \tfrac{15}{27} &= \tfrac{x}{100} && \mid \cdot 100 \\ \tfrac{15\cdot 100}{27} &= x \\ 55{,}6 &\approx x \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite wird durch 100 geteilt, weil man sich immer auf 100 Prozent bezieht.

Aufgaben

a) Andi, Marc und Thomas trainieren für ein Basketballspiel. Andi hat bei 40 Würfen 30 Treffer erzielt, Marc hat bei 30 Würfen 20 Treffer erzielt und Thomas hat bei 50 Würfen 37 erzielt. Wer hat die beste Trefferquote?

b) Die Miete einer Wohnung beträgt 780,- €. Sie soll um 7 % erhöht werden. Wie viel Geld muss jetzt monatlich bezahlt werden?

c) Herr Mohring ist 25 % größer als seine Frau. Er ist 2 m groß. Wie groß ist seine Frau?

d) Herr Dachs arbeitet an der Börse. Im Januar hat er eine Gehaltserhöhung in Höhe von 25 % bekommen. Aufgrund einer Wirtschaftskrise wurde sein Gehalt nun um 21 % gekürzt. Er sagt sich: «Zumindest bekomme ich immer noch mehr Geld als vorher». Erkläre das Ergebnis.

e) Bei Metzger Diem kostet Schweinefleisch 20 % weniger als die gleiche Menge Rindfleisch. Um wie viel Prozent ist das Rindfleisch teurer als das Schweinefleisch?

f) Anna und Magdalena vertreiben sich die Zeit auf der Fahrt in die Ferien dadurch, dass sie zählen, aus welchen Ländern die Autos kommen. Dabei stellen sie fest, dass 50 % der Autos aus Frankreich kommen, 10 % aus Holland und 40 % aus Italien. Sie haben 8 italienische Autos gezählt. Wie viele Autos kamen aus den anderen Ländern und wie viele Autos haben sie insgesamt gezählt?

Tipps

1 Zahlen und Rechnen

1.1 Zahlen und Zahlenmengen

a) Teile den Zähler durch den Nenner. Sobald sich eine Zahl oder eine Zahlenfolge immer wiederholt, kann sie als Periode geschrieben werden.

b) Teile den Zähler durch den Nenner. Benutze *nur* die dritte Stelle nach dem Komma, um die zweite Stelle auf- oder abzurunden.

1.2 Rechnen mit Zahlen und Termen

a) Löse zuerst die Klammern auf. Achte darauf, dass man nur «Gleiches zu Gleichem» addieren darf.

b) Fasse zusammen. Überlege, ob sich deine Lösung in die angebenen Lösungen umformen lässt.

c) Bestimme eine Variable oder Zahl, die in *jedem* Summenglied vorkommt. Diese darf ausgeklammert werden.

d) Vereinfache beide Seiten der Gleichung. Denke daran, dass ein Minus vor einer Klammer alle Vorzeichen in der Klammer beim Ausmultiplizieren umkehrt.

e) I) Setze für b den Wert $\frac{1}{2}$ ein und rechne den Ausdruck aus.

II) Setze den Term mit -21 gleich und löse die entstandene Gleichung nach b auf.

f) I) Suche nach Quadratzahlen, die in den Zahlen unter der Wurzel als Faktor enthalten sind, ziehe teilweise die Wurzel und fasse zusammen.

II) und III) Schreibe alle Zahlen unter eine Wurzel.

1.3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

a) Löse zunächst die Klammern auf, wenn welche vorhanden sind. Ordne dann die Gleichung, indem du die Variablen auf die eine Seite und die Zahlen auf die andere Seite bringst. Zum Schluss teilst du durch den Faktor, der vor der Variablen steht.

b) Du kannst eine Ungleichung genauso lösen, wie du eine Gleichung löst. Falls du die Ungleichung mit einer negativen Zahl multiplizierst, musst du beachten, dass sich dann das Ungleichheitszeichen umdreht.

1.4 Gleichungssysteme mit zwei Variablen

a) Prinzipiell kannst du jedes der drei Verfahren benutzen. Schneller geht es aber, wenn du vorher kurz überlegst, welches Verfahren am effektivsten ist. Steht die Variable bei einer Gleichung alleine auf einer Seite, benutzt du das Einsetzungsverfahren, stehen auf einer Seite nur Zahlen das Additionsverfahren. Steht bei beiden Gleichungen die Variable auf einer Seite, kannst du gleichsetzen. Verwende folgende Verfahren sind besonders geschickt:

I) Einsetzungsverfahren	II) Additionsverfahren	III) Gleichsetzungsverfahren
IV) Additionsverfahren	V) Einsetzungsverfahren	VI) Additionsverfahren

b) I) Damit das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, muss die zweite Gleichung ein Vielfaches der ersten Gleichung sein. Bestimme eine solche Gleichung.

II) Wenn das Gleichungssystem keine Lösung hat, ergibt sich beim Lösen ein Ausdruck wie z.B. $0 = 1$. Du kannst das z.B. erreichen, indem du die linke Seite der Gleichung beibehältst und nur die rechte Seite veränderst.

1.5 Quadratische Gleichungen

a) Forme die Gleichungen so um, dass sie die *abc*-Form oder *pq*-Form haben und verwende die entsprechenden Lösungsformeln.

b) Löse die Gleichung mit Hilfe der entsprechenden Lösungsformel und setze den Term unter der Wurzel (Diskriminante) gleich Null; löse die entstandene Gleichung nach t auf.

c) Skizziere die Problemstellung; benenne die eine Seite x, entsprechend die andere Seite $x+3$ und stelle mit Hilfe des gegebenen Flächeninhalts eine Gleichung auf. Löse die entstandene quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel.

1.6 Textaufgaben

a) I) Stelle eine Gleichung auf, die die Situation beschreibt. Auf die eine Seite der Gleichung schreibst du die Anzahl von Nicis Karten, auf die andere Seite die Anzahl von Tobis Karten plus vier. Überlege dann, in welche der angegebenen Gleichungen sich diese Gleichung umformen lässt.

II) Hier gehst du ähnlich vor: Auf die linke Seite schreibst du die Informationen über Nicis Karten «mathematisch» auf, auf der rechten Seite die Informationen über Tobis Karten.

b) Es ist die Anzahl der Packungen in zwei Paketen zu bestimmen, also handelt es sich um ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Setze die eine Anzahl mit x an und die andere Anzahl mit y. Jetzt musst du noch die beiden Gleichungen aufstellen. Beachte, dass die Gesamtmenge der Packungen 26 ist.

c) Nimm eine Zahl, z.B. die 2 und führe die angegebenen Anweisungen aus. Überlege, was das Ergebnis mit der ursprünglichen Zahl verbindet. Setze dann allgemein x oder eine andere Variable anstelle der Zahl ein und gehe den Weg noch einmal. Den Ausdruck, der entsteht, kannst du gut vereinfachen.

d) Setze eine Zahl mit x an und überlege dir die Darstellung der anderen beiden Zahlen; stelle eine Gleichung auf, bei der sich als Summe 75 ergibt.

1.7 Prozentrechnung

a) Berechne die Trefferquote für jeden der drei Spieler. Dazu kannst du entweder den Dreisatz, die Prozentformel oder Verhältnisgleichungen benutzen.

b) Berechne zuerst, wie viel Geld 7 % der Miete sind. Um die neue Miete zu berechnen, musst du diese 7 % zu der alten Miete dazuaddieren. Alternativ kannst du auch einen Wachstumsfaktor von $1+\frac{7}{100}=1,07$ benutzen, um die neue Miete zu berechnen.

c) Der wichtigste Gedanke bei dieser Aufgabe ist, zu verstehen, dass die Größe von Herrn Mohring 125 % der Größe seiner Frau beträgt, da der Grundwert ja die Größe seiner Frau ist. Benutze eines der Verfahren zum Berechnen von 100 % oder benutze die Multiplikation mit einem Wachstumsfaktor.

d) Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe des Wachstumsfaktors sehr viel schneller lösen als mit den anderen Verfahren. Berechne das neue Gehalt, indem du mit einem Wachstumsfaktor von $1,25$ multiplizierst. Das Ergebnis musst du dann mit dem Faktor $1-\frac{21}{100}=0,79$ multiplizieren. Beispielsweise kannst du auch ein fiktives Gehalt von z.B. 1000,- annehmen und ausrechnen, wie viel er nach der Gehaltserhöhung und der anschließenden Gehaltskürzung verdient.

e) Auch diese Aufgabe geht am schnellsten mit Hilfe von Wachstumsfaktoren: Der Wachstumsfaktor für den Schweinefleischpreis lautet $1-\frac{20}{100}=0,8$, da das Schweinefleisch billiger ist als das Rindfleisch. Stelle diese Gleichung nach dem Rindfleischpreis um. Als Beispiel kannst du auch hier einen fiktiven Preis annehmen und im ersten Schritt ausrechnen, wie viel billiger das Schweinefleisch ist. Im zweiten Schritt rechnest du dann aus, wie teuer das Rindfleisch ist.

f) Hier musst du zuerst berechnen, wie viel 100 % sind. Benutze dafür eines der Verfahren. Wenn du weißt, wie viele Autos es insgesamt sind, kannst du die restlichen Anteile leicht ausrechnen. Entweder mit einem der Verfahren oder direkt durch Teilen (50 % sind die Hälfte).

Lösungen

1 Zahlen und Rechnen

1.1 Zahlen und Zahlenmengen

a) $\frac{1}{4} = 0,25$ $\quad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ $\quad \frac{3}{5} = 0,6$ $\quad \frac{3}{11} = 0,\overline{27}$ $\quad \frac{4}{15} = 0,2\overline{6}$

b) $\frac{1}{3} = 0,\overline{3} \approx 0,33$ $\quad \frac{2}{3} = 0,\overline{6} \approx 0,67$ $\quad \frac{3}{11} = 0,\overline{27} \approx 0,27$ $\quad \frac{4}{15} = 0,2\overline{6} \approx 0,27$ $\quad \frac{5}{11} = 0,\overline{45} \approx 0,45$

Für das Runden auf die 2. Stelle wird nur die dritte Stelle berücksichtigt.
Beispiel: $\frac{5}{11} = 0,4545.. \approx 0,45$ und *nicht* $\frac{5}{11} = 0,4545.. \approx 0,46$

c)

$1,\overline{371}$ ist eine irrationale Zahl	☐ richtig ☒ falsch
-3 ist eine ganze Zahl	☒ richtig ☐ falsch
Das Quadrat jeder reellen Zahl ist eine ganze Zahl	☐ richtig ☒ falsch
$\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl	☒ richtig ☐ falsch
$\sqrt{5}$ ist eine reelle Zahl	☒ richtig ☐ falsch

1.2 Rechnen mit Zahlen und Termen

a)

I) $x^3 - 3x + x^2 - \left(x^3 - x^2\right) = x^3 - 3x + x^2 - x^3 + x^2 = 2x^2 - 3x$

II) $a^2 - a + b - b^2 - b + b^2 = a^2 - a$

III) $a(a-b) + ab - b = a^2 - ab + ab - b = a^2 - b$

Du löst die Klammer auf. Wenn ein Minus vor der Klammer steht drehen sich dabei die Vorzeichen in der Klammer um. Anschließend fasst du zusammen.

b) Den Term $x+y+x+x+y+y$ kannst du vereinfachen, indem du die x und y zusammenfasst.
Es gilt: $x+y+x+x+y+y = 3x+3y = 3\,(x+y)$.

$3xy$	☐ richtig ☒ falsch
$2y+3x+y$	☒ richtig ☐ falsch
$3(x+y)$	☒ richtig ☐ falsch
$3x+3y$	☒ richtig ☐ falsch
x^3+y^3	☐ richtig ☒ falsch

In der ersten Zeile wurde statt des Plus-Zeichens ein Mal verwendet. Die zweite Zeile ist richtig, weil man statt $3y$ auch $2y+y$ schreiben kann. Für die dritte Zeile wurde die 3 ausgeklammert. Die vierte Zeile ist das vereinfachte Ergebnis. Bei der letzten Zeile wurde falsch gerechnet:
$x+x+x = 3x$ und nicht x^3.

c) Ausgeklammert werden kann immer nur eine Zahl oder eine Variable, die in *jedem* Summanden vorkommt.

I) $2a - ab = a\,(2-b)$ $\quad$ II) $xy + x = x\,(y+1)$ $\quad$ III) $x^2 - x = x\,(x-1)$ $\quad$ IV) $ax - ay = a\,(x-y)$

d)

$2\,(x+2) - 3 = 2x+1$	☒ richtig ☐ falsch	
$6 - 2(x-2) = 2 - 2x$	☐ richtig ☒ falsch	$6 - 2(x-2) = 10 - 2x$
$-2(-2-x) - x = 4 - 3x$	☐ richtig ☒ falsch	$-2(-2-x) - x = 4 + x$

e) Gegeben ist $-3 - 2b^2$.

I) $-3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -3 - 2 \cdot \frac{1}{4} = -3,5$

Anstelle von b setzt du $\frac{1}{2}$ ein und rechnest dann den Ausdruck aus.

II)

$$\begin{aligned} -3-2\cdot b^2 &= -21 &&|+3\\ -2\cdot b^2 &= -18 &&|:(-2)\\ b^2 &= 9 &&|\pm\sqrt{\ }\\ b_1 &= +3\\ b_2 &= -3 \end{aligned}$$

Du setzt den Ausdruck mit -21 gleich, da er diesen Wert annehmen soll. Anschließend löst du die Gleichung nach b auf.
Da zum Schluss eine Wurzel gezogen wird, gibt es zwei Lösungen für b.

f) I) $\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{75}=\sqrt{16\cdot3}+\sqrt{9\cdot3}+\sqrt{25\cdot3}=4\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3}=12\cdot\sqrt{3}$

II) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{10}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{5\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{20}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

III) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{\frac{8\cdot6}{12}}=\sqrt{4}=2$

1.3 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

a) I)

$$\begin{aligned} x+2 &= 3x-6 &&|+6\\ x+8 &= 3x &&|-x\\ 8 &= 2x &&|:2\\ 4 &= x \end{aligned}$$

Zuerst ordnest du die Gleichung, dann teilst du durch 2.

II)

$$\begin{aligned} 3(x+1) &= 7-x\\ 3x+3 &= 7-x &&|-3\\ 3x &= 4-x &&|+x\\ 4x &= 4 &&|:4\\ x &= 1 \end{aligned}$$

Hier löst du zuerst die Klammer auf, dann wird geordnet und zum Schluss durch 4 geteilt.

III)

$$\begin{aligned} 4(a-2) &= 5a-2\\ 4a-8 &= 5a-2 &&|+2\\ 4a-6 &= 5a &&|-4a\\ -6 &= a \end{aligned}$$

Auch hier löst du zuerst die Klammer auf, dann wird geordnet wie bei den anderen Aufgaben.

b) I)

$$\begin{aligned} 4-b &\geqslant 2 &&|-4\\ -b &\geqslant -2 &&|\cdot(-1)\\ b &\leqslant 2 &&|:2 \end{aligned}$$

Zuerst ordnest du die Gleichung, anschließend wird mit (-1) multipliziert. Dabei dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

II)

$$\begin{aligned} 2(x-1) &\leqslant 1\\ 2x-2 &\leqslant 1 &&|+2\\ 2x &\leqslant 3 &&|:2\\ x &\leqslant \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Zuerst löst du die Klammer auf, dann wird geordnet und zum Schluss durch 2 geteilt.

III)

$$\begin{aligned} -(a-3)+2 &> 1\\ -a+3+2 &> 1 &&|-5\\ -a &> -4 &&|\cdot(-1)\\ a &< 4 \end{aligned}$$

Auch hier löst du zuerst die Klammer auf, ordnest und multiplizierst mit (-1). Dabei dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

1.4 Gleichungssysteme mit zwei Variablen

a) Je nachdem, welche Art von Gleichungen vorliegt, kannst du die verschiedenen Lösungsverfahren benutzen. Hier ist der geschickteste Weg angegeben.

I) Da in der zweiten Gleichung y «alleine» steht, bietet sich das Einsetzungsverfahren an:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 3 \\ x & - & 3 & = & y \end{array}$$

$x-3=y$ wird in die obere Gleichung eingesetzt und die Gleichung dann nach x aufgelöst.

$$\begin{array}{rcll} 2x+(x-3) & = & 3 & \\ 3x-3 & = & 3 & \mid +3 \\ 3x & = & 6 & \mid :3 \\ x & = & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2-3 & = & y \\ -1 & = & y \end{array}$$

Zum Schluss wird $x=2$ in die untere Gleichung eingesetzt und y berechnet.
$L=\{(2;-1)\}$

II) Da die Variablen alle auf einer Seite stehen, bietet sich das Additionsverfahren an.

$$\begin{array}{rcrcr} 4a & + & b & = & -4 \\ +(-4a & - & 2b & = & 0) \\ \hline & - & b & = & -4 \end{array}$$

In der oberen Gleichung steht $4a$, in der unteren Gleichung $-4a$, also kannst du die beiden Gleichungen direkt addieren, ohne dass multipliziert werden muss.

$$\begin{array}{rcll} -b & = & -4 & \mid \cdot(-1) \\ b & = & 4 & \end{array}$$

Anschließend löst du nach b auf.

$$\begin{array}{rcll} 4a+4 & = & -4 & \mid -4 \\ 4a & = & -8 & \mid :4 \\ a & = & -2 & \end{array}$$

Um a zu bestimmen, setzt du $b=4$ in die obere Gleichung ein.
$L=\{(-2;4)\}$

III) Bei beiden Gleichungen steht a auf der rechten Seite, daher bietet sich das Gleichsetzungsverfahren an.

$$\begin{array}{rcrcr} b & - & 4 & = & a \\ 8 & - & b & = & a \end{array}$$

du setzt die beiden Gleichungen gleich und löst die entstehende Gleichung nach b auf.

$$\begin{array}{rcll} b-4 & = & 8-b & \mid +4 \\ b & = & 12-b & \mid +b \\ 2b & = & 12 & \mid :2 \\ b & = & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6-4 & = & a \\ 2 & = & a \end{array}$$

Um a zu bestimmen, setzt du $b=6$ in die obere Gleichung ein.
$L=\{(2;6)\}$

IV) Da die Variablen alle auf einer Seite stehen, bietet sich das Additionsverfahren an.

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 3 \\ 2a & + & 3b & = & 11 \end{array}$$

In der oberen Gleichung steht a, in der unteren Gleichung $2a$. Daher ist es geschickt, die obere Gleichung mit (-2) zu multiplizieren. Anschließend addierst du die beiden Gleichungen.

$$\begin{array}{rcrcr} -2a & - & 2b & = & -6 \\ +(2a & + & 3b & = & 11) \\ \hline & & b & = & 5 \end{array}$$

du erhältst b direkt.

$$\begin{array}{rcll} a+5 & = & 3 & \mid -5 \\ a & = & -2 & \end{array}$$

Um a zu bestimmen, setzt du $b = 5$ in die ursprüngliche obere Gleichung ein, da diese die einfachere Gleichung ist.

$\mathrm{L} = \{(-2; 5)\}$

V) Bei dieser Aufgabe steht in der zweiten Gleichung y «alleine», daher ist das Einsetzungsverfahren sinnvoll:

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 2 \\ x & - & 4 & = & y \end{array}$$

$y = (x-4)$ wird in die obere Gleichung eingesetzt und die Gleichung dann nach x aufgelöst.

$$\begin{array}{rcll} x - 2\cdot(x-4) & = & 2 & \\ x - 2x + 8 & = & 2 & \mid -8 \\ -x & = & -6 & \mid \cdot(-1) \\ x & = & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6-4 & = & y \\ 2 & = & y \end{array}$$

Nun wird $x = 6$ in die untere Gleichung eingesetzt, y lässt sich damit direkt ausrechnen.

$\mathrm{L} = \{(6; 2)\}$

VI) Da die Variablen alle auf einer Seite stehen, bietet sich das Additionsverfahren an.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 6x & - & y & = & 5 \end{array}$$

In der oberen Gleichung steht $2y$, in der unteren Gleichung y. Es ist daher geschickt, die untere Gleichung mit 2 zu multiplizieren. Anschließend addierst du die beiden Gleichungen.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ +(12x & - & 2y & = & 10) \\ \hline & & 13x & = & 13 \\ & & x & = & 1 \end{array}$$

Du erhältst x, indem du durch 13 teilst.

$$\begin{array}{rcll} 1+2y & = & 3 & \mid -1 \\ 2y & = & 2 & \mid :2 \\ y & = & 1 & \end{array}$$

Um y zu bestimmen, setzt du $x = 1$ in die ursprüngliche obere Gleichung ein, da diese eine sehr einfache Gleichung ist.

$\mathrm{L} = \{(1; 1)\}$

b) Die erste Gleichung lautet $x + y = 4$.

I) Damit das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, muss die zweite Gleichung ein Vielfaches der ersten Gleichung sein. $2x + 2y = 8$ wäre eine Gleichung, die diese Bedingung erfüllt.

II) Damit das Gleichungssystem unlösbar ist, muss sich ein Widerspruch wie z.B. $0 = 3$ ergeben. Eine Möglichkeit, dies zu bewirken, ist eine Gleichung hinzuzufügen, die die gleiche linke Seite wie die erste Gleichung hat, aber eine andere rechte Seite, z.B. $x + y = 1$. Löst man nun das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren, ergibt sich $0 = 3$. Dies ist ein Widerspruch, also ist das Gleichungssystem unlösbar.

1.5 Quadratische Gleichungen

a) I) Die quadratische Gleichung $x^2 + x - 12 = 0$ kannst du mit Hilfe einer Lösungsformel lösen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \tfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1} \\ &= \tfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} \\ &= \tfrac{-1\pm7}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= \tfrac{-1+7}{2} = 3 \\ \Rightarrow x_2 &= \tfrac{-1-7}{2} = -4 \end{aligned}$$

Verwendest du zum lösen die *abc*-Formel, dann musst du zuerst $a = 1$, $b = 1$ und $c = -12$ bestimmen. Wichtig ist, beim Einsetzen auf die Vorzeichen zu achten.

Verwendest du die *pq*-Formel, dann bestimmst du $p = 1$ und $q = -12$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1^2}{4} - (-12)} \\ &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{48}{4}} \\ &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{49}{4}} \\ &= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{7}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{2} = 3 \\ \Rightarrow x_2 &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{2} = -4 \end{aligned}$$

Auch hier ist es wichtig, dass du beim Einsetzen auf die Vorzeichen achtest: q hat den Wert -12, also musst du (-12) in die Gleichung einsetzen.

II) Die Gleichung $4x^2 = 2\cdot(x+1)$ muss zuerst umgeformt werden. Wenn du die Klammer auflöst und alles auf eine Seite bringst, erhältst du: $4x^2 - 2x - 2 = 0$ bzw. $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \tfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot4\cdot(-2)}}{2\cdot4} \\ &= \tfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{8} \\ &= \tfrac{2\pm6}{8} \\ \Rightarrow x_1 &= \tfrac{2+6}{8} = 1 \\ \Rightarrow x_2 &= \tfrac{2-6}{8} = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Verwendest du zum lösen die *abc*-Formel, dann musst du zuerst $a = 4$, $b = -2$ und $c = -2$ bestimmen. Wichtig ist, beim Einsetzen auf die Vorzeichen zu achten.

Verwendest du die *pq*-Formel, dann ist $p = -\frac{1}{2}$ und $q = -\frac{1}{2}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{4} - \left(-\tfrac{1}{2}\right)} \\ &= \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{\frac{1}{4}}{4} + \tfrac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{8}{16}} \\ &= \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16}} \\ &= \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{3}{4} \\ \Rightarrow x_1 &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = 1 \\ \Rightarrow x_2 &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4} = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Auch hier ist es wichtig, dass du beim Einsetzen auf die Vorzeichen achtest: Beide Werte sind negativ, also musst du zwei mal $(-\frac{1}{2})$ in die Gleichung einsetzen.

III) Die quadratische Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$ kann mit Hilfe einer Lösungsformel gelöst werden:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4}}{2\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{1} \\ &= \frac{3\pm 1}{1} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{3+1}{1}=4 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{3-1}{1}=2 \end{aligned}$$

Verwendest du zum lösen die *abc*-Formel, dann musst du zuerst $a=\frac{1}{2}$, $b=-3$ und $c=4$ bestimmen. Wichtig ist, beim Einsetzen auf die Vorzeichen zu achten.

Verwendest du die *pq*-Formel, dann musst du die Gleichung zuerst umformen. Du erhältst: $x^2-6x+8=0$. Anschließend bestimmst du $p=-6$ und $q=8$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-6}{2}\pm\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}-8} \\ &= 3\pm\sqrt{9-8} \\ &= 3\pm 1 \\ \Rightarrow x_1 &= 3+1=4 \\ \Rightarrow x_2 &= 3-1=2 \end{aligned}$$

Auch hier ist es wichtig, dass du beim Einsetzen auf die Vorzeichen achtest: p hat den Wert -6, also musst du (-6) in die Gleichung einsetzen.

b) Die quadratische Gleichung $x^2+4x+t=0$ kann mit Hilfe einer Lösungsformel gelöst werden: Verwendest du die *abc*-Formel, dann bestimmst du zuerst $a=1$, $b=4$, $c=t$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot t}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-4\pm\sqrt{16-4t}}{2} \end{aligned}$$

Setzt man den Term unter der Wurzel gleich Null, hat die Gleichung genau eine Lösung:

$$16-4t=0 \;\Rightarrow\; t=4$$

Verwendest du die *pq*-Formel, dann ist $p=4$ und $q=t$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{4}{2}\pm\sqrt{\frac{4^2}{4}-t} \\ &= -2\pm\sqrt{4-t} \end{aligned}$$

Wenn du den Term unter der Wurzel gleich Null setzt, hat die Gleichung genau eine Lösung:

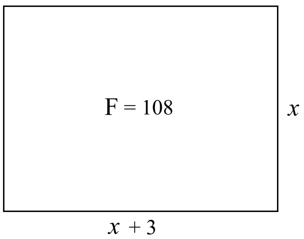
$$4-t=0 \;\Rightarrow\; t=4$$

Für $t=4$ hat die Gleichung genau eine Lösung.

c) Da der Flächeninhalt des Rechtecks $108\,\text{cm}^2$ betragen soll, muss gelten:

$$(x+3)\cdot x=108$$

Also ist die quadratische Gleichung $x^2+3x-108=0$ mit Hilfe einer Lösungsformel zu lösen:



$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-108)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{9+432}}{2} \\ &= \frac{-3\pm 21}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{-3+21}{2}=9 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{-3-21}{2}=-12 \end{aligned}$$

Verwendest du zum lösen die *abc*-Formel, dann musst du zuerst $a=1$, $b=3$ und $c=-108$ bestimmen. Wichtig ist, beim einsetzen auf die Vorzeichen zu achten.

Da eine Länge positiv sein muss, kommt nur die Lösung $x=9$ in Frage. Damit sind die Seitenlängen des

Rechtecks 9 cm und 9 cm + 3 cm = 12 cm lang.
Verwendest du die *pq*-Formel, dann ist $p = 3$ und $q = -108$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{3^2}{4} - (-108)} \\ &= -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} + \tfrac{432}{4}} \\ &= -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{441}{4}} \\ &= -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{21}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= -\tfrac{3}{2} + \tfrac{21}{2} = 9 \\ \Rightarrow x_2 &= -\tfrac{3}{2} - \tfrac{21}{2} = -12 \end{aligned}$$

Auch hier ist es wichtig, dass du beim einsetzen auf die Vorzeichen achtest: p hat den Wert -6, also musst du (-6) in die Gleichung einsetzen.

Da eine Länge positiv sein muss, kommt nur die Lösung $x = 9$ in Frage. Damit sind die Seiten des Rechtecks 9 cm und 9 cm + 3 cm = 12 cm lang.

1.6 Textaufgaben

a) Es ist x die Anzahl von Nicis Karten ist und y die Anzahl von Tobis Karten.

I) Wenn Nici vier Karten mehr hat als Tobi, lässt sich das als die folgende Gleichung schreiben: $x = y + 4$.

$x + y = 4$	☐ richtig ☒ falsch
$x - y = 4$	☒ richtig ☐ falsch
$x = y + 4$	☒ richtig ☐ falsch
$x - y - 4 = 0$	☒ richtig ☐ falsch

Um die obenstehende Gleichung mit den angegebenen Gleichungen zu vergleichen, musst du prüfen, ob sie sich in die jeweilige Gleichung umformen lässt.

II) «Wenn Nici 2 Karten weglegt, hat sie halb so viele Karten wie Tobi». Wenn Nici x Karten hat, müssen davon zuerst 2 abgezogen werden. Also steht $x - 2$ auf der linken Seite der Gleichung. Auf der rechten Seite steht $\frac{1}{2} \cdot y$, da das genau die Hälfte von Tobis Karten ist. Die Gleichung lautet also $x - 2 = \frac{1}{2}y$.

$x - 2 = \frac{1}{2} \cdot y$	☒ richtig ☐ falsch
$y - 2 = \frac{1}{2} \cdot x$	☐ richtig ☒ falsch
$2(x - 2) = y$	☒ richtig ☐ falsch
$x - 2 = 2 \cdot y$	☐ richtig ☒ falsch

Die erste Gleichung ist genau die obenstehende Gleichung. Diese lässt sich nicht in die zweite Gleichung umformen. Um zur dritten Gleichung zu gelangen, musst du die Lösungsgleichung mit 2 multiplizieren. Die vierte Gleichung stimmt auf der linken Seite mit der Lösung überein, aber nicht auf der rechten Seite, also kann sie nicht richtig sein.

b) Es sollen zwei Pakete gepackt werden. Die Anzahl der Kaffeepackungen in dem einen Paket wird mit x bezeichnet, die Anzahl der Packungen in dem anderen Paket mit y. Es werden zwei Gleichungen benötigt. Da die Gesamtanzahl 26 ist, muss gelten $x + y = 26$. Da in dem einen Paket 8 Packungen mehr sein sollen als in dem anderen Paket, gilt $x + 8 = y$. (Du kannst auch $y + 8 = x$ ansetzen, dann werden die Pakete genau umgekehrt gepackt.)

$$\begin{aligned} x + y &= 26 \\ x + 8 &= y \end{aligned}$$

Da in der zweiten Gleichung y alleine steht, bietet sich das Einsetzungsverfahren an.

$$\begin{aligned} x + (x + 8) &= 26 \\ 2x + 8 &= 26 \quad | -8 \\ 2x &= 18 \quad | : 2 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 + 8 &= y \\ 17 &= y \end{aligned}$$

Zum Schluss setzt du $x = 9$ in die untere Gleichung ein.

Also sind in einem Paket 9 Packungen Kaffee und in dem anderen Paket 17 Packungen Kaffee.

c) I) Wenn die gedachte Zahl 2 ist, gilt: $2 \cdot 3 = 6$. Jetzt wird 6 mit 4 multipliziert: $6 \cdot 4 = 24$. Zum Schluss wird $2 \cdot 2 = 4$ abgezogen. Also ist das Ergebnis 20. Wenn du mit 3 startest, ergibt sich 30. Man kann also vermuten, dass das Ergebnis immer das 10-fache der Ausgangszahl ist.

II) Um den Weg als Formel zu schreiben, setzt du die Zahl als Variable an, z.B. x und gehst den gleichen Weg: Du erhälst: $(3 \cdot x) \cdot 4 - 2 \cdot x$.

III) Um zu zeigen, warum die Ausnahme aus I) gilt, musst du nur das Ergebnis vereinfachen, indem du die Klammer auflöst: $(3 \cdot x) \cdot 4 - 2 \cdot x = 12x - 2x = 10x$. Damit ist klar, dass das Ergebnis immer das 10-fache der gedachten Zahl ist.

d) Wenn die Summe aus drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen 75 sein soll, muss für die Zahlen gelten: $x + (x+2) + (x+4) = 75$, daraus ergibt sich $3x = 69$ bzw. $x = 23$.
Damit lauten die Zahlen 23, 25 und 27.

1.7 Prozentrechung

a) Du berechnest die Trefferquote für jeden der Spieler. Dabei kannst du einen der angegebenen Lösungswege benutzen.

Andis Trefferquote

Lösung mit dem Dreisatz:

$$\begin{aligned} 40 \text{ Treffer} &\mathrel{\hat{=}} 100\,\% && |:40 \\ 1 \text{ Treffer} &\mathrel{\hat{=}} \tfrac{100}{40}\,\% && |\cdot 30 \\ 30 \text{ Treffer} &\mathrel{\hat{=}} \tfrac{100 \cdot 30}{40}\,\% = 75\,\% \end{aligned}$$

40 Treffer entsprechen 100 %. Entsprechend musst du durch 40 teilen. Zum Schluss musst du mit 30 multiplizieren, da nach dem Prozentsatz von 30 Treffern gefragt wurde.

Lösung mit der Prozentformel

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{\mathrm{P} \cdot 100}{\mathrm{G}} \\ p &= \tfrac{30 \cdot 100}{40} \\ p &= 75 \end{aligned}$$

Der Grundwert G ist 40, der Prozentwert P ist 30, gesucht ist der Prozentsatz p.

Lösung mit Verhältnisgleichungen:
Die Gleichung lautet: «30 verhält sich zu 40 wie x zu 100»

$$\begin{aligned} \tfrac{30}{40} &= \tfrac{x}{100} \quad | \cdot 100 \\ \tfrac{30 \cdot 100}{40} &= x \\ 75 &= x \end{aligned}$$

Es ist geschickt, die Gleichung so aufzustellen, dass x im Zähler steht, weil du dann nur mit 100 multiplizieren musst, um nach x aufzulösen.

Marcs Trefferquote

Lösung mit dem Dreisatz:

$$\begin{aligned} 30 \text{ Treffer} &\mathrel{\hat{=}} 100\,\% && |:30 \\ 1 \text{ Treffer} &\mathrel{\hat{=}} \tfrac{100}{30}\,\% && |\cdot 20 \\ 20 \text{ Treffer} &\mathrel{\hat{=}} \tfrac{100 \cdot 20}{30}\,\% \approx 66{,}7\,\% \end{aligned}$$

30 Treffer entsprechen 100 %. Entsprechend musst du durch 30 teilen. Zum Schluss musst du mit 20 multiplizieren, da nach dem Prozentsatz für 20 Treffer gefragt wurde.

Lösung mit der Prozentformel

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{\mathrm{P} \cdot 100}{\mathrm{G}} \\ p &= \tfrac{20 \cdot 100}{30} \\ p &\approx 66{,}7 \end{aligned}$$

Der Grundwert G ist 30, der Prozentwert P ist 20, gesucht ist der Prozentsatz p.

Lösung mit Verhältnisgleichungen:
Die Gleichung lautet: «20 verhält sich zu 30, wie x zu 100»

$$\begin{aligned} \frac{20}{30} &= \frac{x}{100} \quad | \cdot 100 \\ \frac{20\cdot 100}{30} &= x \\ 66,7 &\approx x \end{aligned}$$

Es ist geschickt, die Gleichung so aufzustellen, dass x im Zähler steht, weil du dann nur mit 100 multiplizieren musst, um nach x aufzulösen.

Thomas Trefferquote
Lösung mit dem Dreisatz:

$$\begin{aligned} 50 \text{ Treffer} &\mathrel{\widehat{=}} 100\,\% && |:50 \\ 1 \text{ Treffer} &\mathrel{\widehat{=}} \tfrac{100}{50}\,\% && |\cdot 37 \\ 37 \text{ Treffer} &\mathrel{\widehat{=}} \tfrac{100\cdot 37}{50}\,\% = 74\,\% \end{aligned}$$

50 Treffer entsprechen 100 %. Entsprechend musst du durch 50 teilen. Zum Schluss musst du mit 37 multiplizieren, da nach dem Prozentsatz für 37 Treffer gefragt wurde.

Lösung mit der Prozentformel

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mathrm{P}\cdot 100}{\mathrm{G}} \\ p &= \frac{37\cdot 100}{50} \\ p &= 74 \end{aligned}$$

Der Grundwert G ist 50, der Prozentwert P ist 37, gesucht ist der Prozentsatz p.

Lösung mit Verhältnisgleichungen:
Die Gleichung lautet: «37 verhält sich zu 50, wie x zu 100»

$$\begin{aligned} \frac{37}{50} &= \frac{x}{100} \quad | \cdot 100 \\ \frac{37\cdot 100}{50} &= x \\ 74 &= x \end{aligned}$$

Es ist geschickt, die Gleichung so aufzustellen, dass x im Zähler steht, weil du dann nur mit 100 multiplizieren musst, um nach x aufzulösen.

Also hat Andi die höchste Trefferquote.

b) Lösung mit dem Dreisatz:

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 780\,€ && |:100 \\ 1\,\% &\mathrel{\widehat{=}} \tfrac{780\,€}{100} && |\cdot 7 \\ 7\,\% &\mathrel{\widehat{=}} 54,60\,€ \end{aligned}$$

100 % entsprechen 780 €. Da nach 7 % gefragt ist, musst du durch 100 teilen, um auf 1 % zu kommen und anschließend mit 7 multiplizieren.

Lösung mit der Prozentformel

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{p\cdot \mathrm{G}}{100} \\ \mathrm{P} &= \frac{7\cdot 780}{100} \\ \mathrm{P} &= 54,60 \end{aligned}$$

Der Grundwert G ist 780, der Prozentsatz p ist 7, gesucht ist der Prozentwert P.

Lösung mit Verhältnisgleichungen:
Die Gleichung lautet: «7 verhält sich zu 100, wie x zu 780»

$$\begin{aligned} \frac{7}{100} &= \frac{x}{780} \quad | \cdot 100 \\ \frac{7\cdot 780}{100} &= x \\ 54,60 &= x \end{aligned}$$

Es ist geschickt, die Gleichung so aufzustellen, dass x im Zähler steht, weil du dann nur mit 780 multiplizieren musst, um nach x aufzulösen.

Um die neue monatliche Gesamtmiete zu berechnen, werden die beiden Werte addiert:
$780\,€ + 54,60\,€ = 834,60\,€$. Die monatliche Gesamtmiete beträgt jetzt also $834,60\,€$.
Eine weitere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, ist mit Hilfe des Wachstumsfaktors q:
Bei 7 % Mietzuwachs beträgt $q = 1 + \frac{7}{100} = 1,07$. Also berechnest du $780\,€ \cdot 1,07 = 834,60\,€$.

c) Der wichtigste Lösungsgedanke bei dieser Aufgabe ist, dass die Größe von Herrn Mohring 125 % beträgt, weil er 25 % größer als seine Frau ist.
Lösung mit dem Dreisatz:

$$\begin{aligned} 125\,\% &\mathrel{\hat{=}} 2\,\mathrm{m} && \mid :125 \\ 1\,\% &\mathrel{\hat{=}} \tfrac{2\,\mathrm{m}}{125} && \mid \cdot 100 \\ 100\,\% &\mathrel{\hat{=}} 1{,}6\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

125 % entsprechen 2 m. Da der Wert von 100 % gefragt ist, musst du durch 125 teilen, um auf 1 % zu kommen und anschließend mit 100 multiplizieren.

Lösung mit der Prozentformel

$$\begin{aligned} G &= \tfrac{P\cdot 100}{p} \\ G &= \tfrac{2\cdot 100}{125} \\ G &= 1{,}6 \end{aligned}$$

Bei dieser Aufgabe ist nach dem Grundwert gefragt. Da Herr Mohring 25 % größer als seine Frau ist, beträgt der Prozentsatz 125 % und der Prozentwert 2 m.

Lösung mit Verhältnisgleichungen:
Die Gleichung lautet: «125 verhält sich zu 100 wie x zu 2»

$$\begin{aligned} \tfrac{125}{100} &= \tfrac{x}{2} \quad \mid \cdot 2 \\ \tfrac{2\cdot 125}{100} &= x \\ 1{,}6 &= x \end{aligned}$$

Es ist geschickt, die Gleichung so aufzustellen, dass x im Zähler steht, weil du dann nur mit 2 multiplizieren musst, um nach x aufzulösen.

Lösung mit dem Wachstumsfaktor q:
Du kannst auch so ansetzen: «Wenn die Größe seiner Frau x Meter beträgt, und Herr Mohring 25 % größer ist als sie, beträgt der Wachstumsfaktor $q = 1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$. Also muss gelten: $x \cdot 1{,}25 = 2$, also ist $x = \frac{2}{1{,}25} = 1{,}6$.

d) Diese Aufgabe lässt sich am besten mit Hilfe des Wachstumsfaktors q lösen: Das Gehalt von Herrn Dachs wird mit G bezeichnet. Wenn er eine Gehaltserhöhung um 25 % bekommt, entspricht das der Multiplikation mit dem Faktor $q_1 = 1 + \frac{25}{100} = 1{,}25$. Sein neues Gehalt G_1 ist damit $G_1 = 1{,}25 \cdot G$. Wenn sein Gehalt um 21 % gekürzt wird, entspricht dies einer Multiplikation mit $q_2 = 1 - \frac{21}{100} = 0{,}79$. Sein Gehalt G_2 nach der Kürzung ist damit $G_2 = 0{,}79 \cdot G_1$.

$$\begin{aligned} G_2 &= 0{,}79 \cdot G_1 \\ &= 0{,}79 \cdot (1{,}25 \cdot G) \\ &= 0{,}9875 \cdot G \end{aligned}$$

Um auszurechnen, ob er mehr oder weniger Geld verdient als am Anfang, setzt du nun G ein und multiplizierst aus.

Also verdient Herr Dachs weniger Geld also vorher.
Beispiel-Rechnung mit dem Dreisatz:
Die Aufgabe lässt sich auch mit dem Dreisatz lösen. Zum Beispiel kannst du ein (fiktives) Gehalt von 1000 € annehmen und dann mit Hilfe von zwei Dreisätzen ausrechnen, wie viel Geld er bekommt.

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\hat{=}} 1000\,€ && \mid :100 \\ 1\,\% &\mathrel{\hat{=}} 10\,€ && \mid \cdot 25 \\ 25\,\% &\mathrel{\hat{=}} 250\,€ \end{aligned}$$

100 % entsprechen 1000 €. Da der Wert von 25 % gefragt ist, musst du durch 100 teilen, um auf 1 % zu kommen und anschließend mit 25 multiplizieren.

Nach der Gehaltserhöhung bekommt er also $1000\,€ + 250\,€ = 1250\,€$. Nun wird sein neues Gehalt um 21 % gekürzt:

$$\begin{aligned} 100\,\% &\mathrel{\hat{=}} 1250\,€ && \mid :100 \\ 1\,\% &\mathrel{\hat{=}} 12{,}50\,€ && \mid \cdot 21 \\ 21\,\% &\mathrel{\hat{=}} 262{,}50\,€ \end{aligned}$$

100 % entsprechen 1250 €. Da der Wert von 21 % gefragt ist, musst du durch 100 teilen, um auf 1 % zu kommen und anschließend mit 21 multiplizieren.

Sein Gehalt beträgt also $1250\,€ - 262{,}50\,€ = 987{,}50\,€$. Also verdient er weniger als vorher.
Diese Rechnung kannst du auch mit der Prozentformel oder den Verhältnisgleichungen ausführen.

Wie kommt es zu dem Ergebnis? Die 25 % Erhöhung beziehen sich auf sein Ausgangsgehalt. Die 21 % Kürzung beziehen sich aber auf das erhöhte Gehalt, der Grundwert hat sich hier also geändert. Deswegen ist die Kürzung größer als die Erhöhung; Herr Dachs hat sich getäuscht.

e) Auch bei dieser Aufgabe geht der Ansatz mit den Wachstumsfaktoren am schnellsten: Das Schweinefleisch S kostet 20 % weniger als das Rindfleisch R. Also lautet der Wachstumsfaktor $q = 1 - \frac{20}{100} = 0,8$. Als Gleichung geschrieben gilt nun:

S	$=$	$0,8 \cdot R$	$\mid :0,8$	Da gefragt ist, wie teuer das Rindfleisch in Bezug auf das Schweinefleisch ist, musst du die Gleichung nur nach R umstellen, indem du durch $0,8$ teilst.
$1,25 \cdot S$	$=$	R		

Der Wachstumsfaktor vor S ist $1,25 = 1 + \frac{25}{100}$, also ist das Rindfleisch 25 % teurer als das Schweinefleisch.
Beispiel-Rechnung mit dem Dreisatz:
Die Aufgabe lässt sich auch mit dem Dreisatz lösen. Wie in der letzten Aufgabe nimmst du einen fiktiven Preis an und rechnest dann mit diesem Preis. Das Rindfleisch koste z.B. 10 €.

100 %	$\widehat{=}$	10 €	$\mid :100$	100 % entsprechen 10 €. Da der Wert von 20 % gefragt ist, musst du durch 100 teilen, um auf 1 % zu kommen und anschließend mit 20 multiplizieren.
1 %	$\widehat{=}$	0,10 €	$\mid \cdot 20$	
20 %	$\widehat{=}$	2 €		

Das Schweinefleisch kostet also $10\,€ - 2\,€ = 8\,€$. Nun musst du ausrechnen, wie viel Prozent das Rindfleisch teurer ist als das Schweinefleich.

8 €	$\widehat{=}$	100 %	$\mid :8$	8 € entsprechen 100 %. Da der Wert von 10 € gefragt ist, musst du durch 8 teilen, um auf 1 € zu kommen und anschließend mit 10 multiplizieren.
1 €	$\widehat{=}$	12,5 %	$\mid \cdot 10$	
10 €	$\widehat{=}$	125 %		

Da der Rindfleischpreis 125 % des Schweinefleischpreises beträgt, kostet das Rindfleisch also 25 % mehr als das Schweinefleisch.
Auch diese Aufgaben kannst du mit der Prozentformel oder den Verhältnisgleichungen durchführen.

f) Bei dieser Aufgabe musst du zuerst berechnen, wie viel 100 % sind:

40 %	$\widehat{=}$	8 Autos	$\mid :40$	40 % entsprechen 8 Autos. Da gefragt ist, wie viele Autos 100 % sind, musst du durch 40 teilen, um auf 1 % zu kommen und anschließend mit 100 multiplizieren.
1 %	$\widehat{=}$	0,2 Autos	$\mid \cdot 100$	
100 %	$\widehat{=}$	20 Autos		

Also haben sie insgesamt 20 Autos gezählt. Nun muss noch berechnet werden, wie viele Autos aus Frankreich und Holland kamen. Das geht mit Hilfe des Dreisatzes oder aber auch direkt: 50 % der Autos kommen aus Frankreich, das sind also 10 Autos. 8 Autos kamen aus Italien, die restlichen 2 Autos kamen also aus Holland. Die Prozentrechnung hättest du auch mit der Prozentformel oder Verhältnisgleichungen durchführen können.