

Gruber | Neumann

# Erfolg im Mathe-Abi 2023

Übungsbuch für den Wahlteil  
im Leistungsfach Mathematik  
Baden-Württemberg  
mit Tipps und Lösungen

Freiburger  
Verlag

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>Analysis</b>	<b>7</b>
<b>1 Hefe</b>	<b>7</b>
<b>2 Wassertemperatur</b>	<b>10</b>
<b>3 Regen</b>	<b>12</b>
<b>4 Straße</b>	<b>14</b>
<b>5 Medikament</b>	<b>16</b>
<b>6 Virus</b>	<b>18</b>
<b>7 Lufttemperatur</b>	<b>20</b>
<b>Geometrie</b>	<b>22</b>
<b>8 Kiste</b>	<b>22</b>
<b>9 Geradenschar</b>	<b>23</b>
<b>10 Flugzeug</b>	<b>24</b>
<b>11 Pyramide</b>	<b>25</b>
<b>12 Platte</b>	<b>26</b>
<b>13 Rampe</b>	<b>27</b>
<b>14 Ebenenschar</b>	<b>28</b>
<b>15 Lichtstrahl</b>	<b>29</b>
<b>Stochastik</b>	<b>31</b>
<b>16 Bildschirm</b>	<b>31</b>
<b>17 Weizen</b>	<b>33</b>
<b>18 Bleistifte</b>	<b>34</b>
<b>19 Hundefutter</b>	<b>35</b>
<b>20 Flugbuchung</b>	<b>37</b>
<b>21 Eier</b>	<b>39</b>
<b>Tipps</b>	<b>40</b>
<b>Lösungen</b>	<b>63</b>
<b>Abituraufgaben 2020</b>	<b>154</b>
<b>Abituraufgaben 2021</b>	<b>200</b>
<b>Abituraufgaben 2022</b>	<b>244</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>287</b>

# Vorwort

## Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs. Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Wahlteils des Mathematik-Abiturs des Leistungsfachs in Baden-Württemberg ab 2023 abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik sowie angepasste Abituraufgaben seit 2020 in einem Buch. Insgesamt gibt es 45 Verrechnungspunkte (VP). In Analysis gibt es eine sehr umfangreiche Aufgabe mit 20 VP, in der Analytischen Geometrie und in Stochastik gibt es jeweils eine Aufgabe mit 12,5 VP.

Pro Jahrgang gibt es zwei Aufgaben aus der Analysis (A1 und A2), zwei Aufgaben aus der Analytischen Geometrie (B1 und B2) sowie zwei Aufgaben aus der Stochastik (C1 und C2).

Der Wahlteil besteht aus komplexeren Aufgaben, die mithilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) und einer Merkhilfe gelöst werden sollen. Der Schwerpunkt liegt auf der Analysis. Thematisch geht es meist um anwendungsbezogene Transferaufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Aufgabenstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und um das Entwickeln von Lösungsstrategien.

Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden. Daher befinden sich im Buch QR-Codes für die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Taschenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist z.B. auf ein Video zum Erstellen einer Wertetabelle.

Unter [www.freiburger-verlag.de](http://www.freiburger-verlag.de) erhalten Sie **weitere Aufgaben** kostenfrei als pdf zum Download.



## Der blaue Tippteil

Hat man einmal keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll bzw. fehlt der Lösungsansatz, hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

## Die Kontrollkästchen



Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

## Der Aufbau der Mathematikprüfung

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 270 Minuten (4,5 Zeitstunden).
- Die Lehrerin/ der Lehrer erhält vor der Prüfung den Pflichtteil (HMF) und für den Wahlteil zwei Aufgabenvorschläge aus Analysis (A1 und A2), zwei aus Analytischer Geometrie (B1 und B2) sowie zwei aus Stochastik (C1 und C2). Die Lehrerin/ der Lehrer wählt aus den Vorschlägen für den Wahlteil je einen aus Analysis, einen aus Analytischer Geometrie und einen aus Stochastik aus.
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil und den vom Lehrer/ der Lehrerin ausgesuchten Wahlteil, bestehend aus Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst den Pflichtteil. Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 60 Verrechnungspunkte in der Prüfung erreicht werden, davon 15 im Pflichtteil (HMF) und 45 im Wahlteil.

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg!

Helmut Gruber, Robert Neumann

# Geometrie

## 8 Kiste



*Tipps ab Seite 50, Lösungen ab Seite 102*

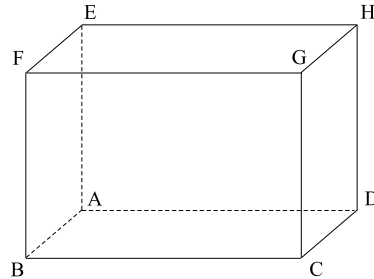
Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte  $A(0 \mid 0 \mid 0)$ ,  $B(3 \mid 0 \mid 0)$ ,  $D(0 \mid 5 \mid 0)$  und  $F(3 \mid 0 \mid 4)$  festgelegt.

Die Fläche EFGH stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar.

Dieser ist drehbar um die Kante EH.

Weiterhin ist für jedes  $t \geq 0$  eine Ebene  $E_t$  gegeben durch die Gleichung

$$E_t: tx_1 - x_3 = -4.$$



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

- a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.

Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene  $E_t$  liegt.

Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Ebene  $E_t$ , in welcher der Deckel bei geschlossener Kiste liegt.

Prüfen Sie, ob der Deckel in einer Ebene  $E_t$  liegt, wenn er um  $90^\circ$  geöffnet ist.

- b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in  $E_2$  liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel.

Berechnen Sie die Koordinaten von P.

- c) Berechnen Sie den Öffnungswinkel, wenn der Deckel in  $E_2$  liegt.

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene  $E_t$ , in welcher der Deckel liegt, wenn der Öffnungswinkel  $60^\circ$  beträgt.

Bestimmen Sie den Parameter  $t$  in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel  $\alpha$  für  $\alpha < 90^\circ$ .

# Geometrie

## Das Vektorprodukt

Wenn man einen Vektor  $\vec{n}$  sucht, der senkrecht auf zwei gegebenen Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  steht (der Normalenvektor), geschieht dies einfach und schnell mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Die Merkhilfe dazu:

1. Beide Vektoren werden je zweimal untereinandergeschrieben, dann werden die erste und die letzte Zeile gestrichen.
2. Anschließend wird «über Kreuz» multipliziert. Dabei erhalten die abwärts gerichteten Pfeile ein positives und die aufwärts gerichteten Pfeile ein negatives Vorzeichen.
3. Die einzelnen Komponenten werden subtrahiert – fertig!

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sind  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ergibt sich für den gesuchten Vektor:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{0} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

Mithilfe des Vektorprodukts lässt sich die Fläche des Dreiecks ABC direkt ausrechnen. Es ist:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

## 8 Kiste

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte der Kiste.

Den Abstand zwischen den Kanten AB und GH erhalten Sie, indem Sie zum Beispiel die Entfernung der Punkte A und H berechnen.

Stellen Sie die Gleichung der Geraden  $g$  durch E und H auf und setzen Sie diese in die Ebenengleichung  $E_t$  ein. Bei einer wahren Aussage liegt die Gerade in  $E_t$ .

Setzen Sie die Koordinaten von F in  $E_t$  ein und lösen Sie die Gleichung nach  $t$  auf, um diejenige Ebene  $E_t$  zu bestimmen, in welcher der Deckel bei geschlossener Kiste liegt.

Beim Öffnen des Deckels um  $90^\circ$  geht der Punkt F in einen Punkt  $\bar{F}$  über. Bestimmen Sie den Punkt  $\bar{F}$  und setzen Sie die Koordinaten von  $\bar{F}$  in  $E_t$  ein. Bei einem Widerspruch liegt der Deckel nicht in einer Ebene  $E_t$ .

- b) Setzen Sie  $t = 2$  in  $E_t$  ein.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts  $M_{EF}$  der Kante EF.

Stellen Sie eine Lotgerade  $l$  durch  $M_{EF}$  orthogonal zu  $E_2$  auf (der Richtungsvektor von  $l$  ist der Normalenvektor von  $E_2$ ).

Sie erhalten die Koordinaten von P, indem Sie  $l$  und  $E_2$  schneiden.

- c) Um den Öffnungswinkel  $\alpha$  zu bestimmen, setzen Sie einen Normalenvektor  $\vec{n}_2$  von  $E_2$  und einen Normalenvektor  $\vec{n}_1$  der Ebene EFGH, die parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene ist, in folgende

$$\text{Formel ein: } \cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Um diejenige Ebene  $E_t$  zu bestimmen, in welcher der Deckel bei einem Öffnungswinkel von  $60^\circ$  liegt, setzen Sie einen Normalenvektor  $\vec{n}_t$  von  $E_t$ , einen Normalenvektor  $\vec{n}_1$  der

Ebene EFGH und  $\alpha = 60^\circ$  in die Formel  $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_t|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_t|}$  ein und lösen die erhaltene Gleichung durch Quadrieren nach  $t$  auf.

Lösen Sie allgemein die Gleichung  $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_t|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_t|}$  durch Quadrieren nach  $t$  auf, um den Parameter  $t$  in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel angeben zu können.

## 9 Geradenschar

- a) Setzen Sie  $a = 4$  in die Gleichung der Geradenschar ein, um die Gleichung von  $g_4$  zu erhalten.

Den Schnittpunkt S der Geraden  $g_4$  mit der Ebene E erhalten Sie, indem Sie den allgemeinen Punkt  $P_t$  von  $g_4$  in die Ebenengleichung einsetzen und die Gleichung nach  $t$  auflösen. Setzen Sie den erhaltenen  $t$ -Wert in  $P_t$  ein.

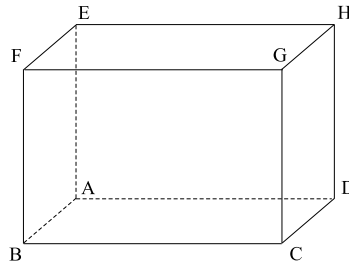
Beachten Sie, dass die Gerade  $g_a$  parallel zu E ist, wenn der Richtungsvektor von  $g_a$  orthogonal zum Normalenvektor von E ist, d.h. wenn das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ergibt. Lösen Sie die entsprechende Gleichung nach  $a$  auf.

Beachten Sie, dass eine Gerade  $g_a$  der Schar orthogonal zu  $g_4$  ist, wenn der Richtungsvektor  $\vec{u}_a$  orthogonal zum Richtungsvektor  $\vec{u}_4$  von  $g_4$  ist, d.h. das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ergibt. Lösen Sie die entsprechende Gleichung nach  $a$  auf.

# Geometrie

## 8 Kiste

a)



Die Koordinaten der Eckpunkte der Kiste sind  $A(0 \mid 0 \mid 0)$ ,  $B(3 \mid 0 \mid 0)$ ,  $C(3 \mid 5 \mid 0)$ ,  $D(0 \mid 5 \mid 0)$ ,  $E(0 \mid 0 \mid 4)$ ,  $F(3 \mid 0 \mid 4)$ ,  $G(3 \mid 5 \mid 4)$  und  $H(0 \mid 5 \mid 4)$ .

Den Abstand zwischen den Kanten AB und GH erhält man, indem man die Entfernung der Punkte A und H berechnet, da die Kiste quaderförmig ist:

$$\overline{AH} = |\overrightarrow{AH}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

Der Abstand der Kanten AB und GH beträgt etwa 6,4LE.

Um zu zeigen, dass die Gerade  $g$  durch E und H in jeder Ebene  $E_t: tx_1 - x_3 = -4$  liegt, stellt man die Geradengleichung von  $g$  auf und setzt sie in  $E_t$  ein. Man erhält:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

Einsetzen von  $g$  in  $E_t$  ergibt:  $t \cdot 0 - (4 + s \cdot 0) = -4$  bzw.  $-4 = -4$ .

Aufgrund der wahren Aussage liegt die Gerade  $g$  in jeder der Ebenen  $E_t$ .

Bei geschlossener Kiste liegt der Punkt  $F(3 \mid 0 \mid 4)$  auf dem Deckel. Setzt man die Koordinaten von F in  $E_t$  ein, so erhält man:  $t \cdot 3 - 4 = -4 \Rightarrow t = 0$ .

Somit liegt der Deckel bei geschlossener Kiste in der Ebene  $E_0: -x_3 = -4$  bzw.  $x_3 = 4$ .

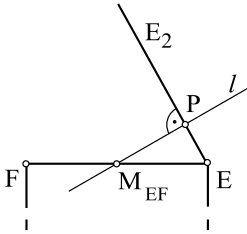
Wird der Deckel um  $90^\circ$  geöffnet, so geht der Eckpunkt F des geschlossenen Deckels in den Eckpunkt  $\bar{F}(0 \mid 0 \mid 7)$  über.

Setzt man die Koordinaten von  $\bar{F}$  in  $E_t$  ein, so erhält man:  $t \cdot 0 - 7 = -4 \Rightarrow -7 = -4$ .

Aufgrund des Widerspruchs liegt der um  $90^\circ$  geöffnete Deckel in keiner der Ebenen  $E_t$ .



b)



Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Lotgeraden  $l$  und der Ebene  $E_2$ .

Die Ebene  $E_2$  hat die Gleichung  $E_2: 2x_1 - x_3 = -4$ . Der Mittelpunkt der Kante EF hat die Koordinaten  $M_{EF}(1,5 \mid 0 \mid 4)$ . Die Lotgerade  $l$  geht durch den Punkt  $M_{EF}$  und ist orthogonal zu  $E_2$  (der Richtungsvektor von  $l$  ist somit der Normalenvektor von  $E_2$ ):

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

Schneidet man  $l$  mit  $E_2$ , so ergibt sich:  $2 \cdot (1,5 + 2r) - (4 - r) = -4 \Rightarrow r = -0,6$ .

Setzt man  $r = -0,6$  in  $l$  ein, so erhält man den gesuchten Punkt  $P(0,3 \mid 0 \mid 4,6)$ , in welchem der Stützstab auf den Deckel trifft.

c) Um den Öffnungswinkel  $\alpha$  zu bestimmen, wenn der Deckel in  $E_2$  liegt, berechnet man den

Winkel zwischen dem Normalenvektor  $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  von  $E_2$  und dem Normalenvektor

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  der Ebene EFGH. Man erhält:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$$

Wenn der Deckel in  $E_2$  liegt, beträgt der Öffnungswinkel etwa  $63,4^\circ$ .

Bei einem Öffnungswinkel von  $\alpha = 60^\circ$  erhält man:

$$\cos(60) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_t|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_t|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{t^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Da  $\cos(60) = \frac{1}{2}$  ist, gilt:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1} = 2$$

Daraus folgt:

$$t^2 + 1 = 4 \Rightarrow t = +\sqrt{3}$$

Dies ist einzige Lösung wegen  $t \geq 0$ .

Somit liegt der um  $60^\circ$  geöffnete Deckel in der Ebene  $E_{\sqrt{3}}: \sqrt{3}x_1 - x_3 = -4$ .

Um den Parameter  $t$  in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel  $\alpha$  zu bestimmen, löst man die Gleichung

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_t|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_t|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

nach  $t$  auf. Wegen  $\alpha < 90^\circ$  ist  $\cos(\alpha) \neq 0$  und man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} &= \cos(\alpha) \\ \frac{1}{\cos(\alpha)} &= \sqrt{t^2 + 1} \\ \frac{1}{(\cos(\alpha))^2} &= t^2 + 1 \\ \frac{1}{(\cos(\alpha))^2} - 1 &= t^2 \\ t_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{(\cos(\alpha))^2} - 1} \end{aligned}$$

Wegen  $t \geq 0$  ist  $t = \sqrt{\frac{1}{(\cos \alpha)^2} - 1}$  die einzige Lösung.

## Stichwortverzeichnis

- Änderungsrate, 246
- Abenteuerspielplatz, 200
- Abflussrate, 247
- Änderungsrate, 17, 18
- Baumdiagramm, 33
- Bikepark, 156
- Binomialkoeffizient, 31
- Erkrankungsrate, 18
- Erwärmungsgeschwindigkeit, 10
- Fußpunkt, 27
- Funktionenscharen
  - Exponentialfunktionen, 7, 15, 21
  - ganzrationale Funktionen, 155, 203
  - trigonometrische Funktionen, 11, 13
- Geradenschar, 23, 251
- Gewächshaus, 206
- Glücksrad, 254
- Höhenzunahme, 154
- Hypothesentest, 209
- Interpretation von Schaubildern, 14
- knickfreier Übergang, 14, 200
- Kreuzprodukt, 49
- Neigungswinkel, 23
- Niederschlagsrate, 13
- Normalverteilung, 33, 37, 39, 163, 207, 252
- Öffnungswinkel, 22
- Pfadregeln, 33
- Prisma, 26
- Projektionsfläche, 160
- Pyramide, 23, 25, 159, 205, 249
- Schatten, 25, 26
- Spiegelung, 244
- Tanzpaare, 163, 209
- Temperaturverlauf, 20
- Vektorprodukt, 49
- Volumenberechnung, 25
- Wachstum
  - beschränktes, 10
  - exponentielles, 7
- Wachstumsgeschwindigkeit, 202
- Wachstumsrate, 154
- Wasserabflussrate, 13
- Wendepunkt, 244
- Winkel, 23–26, 28, 244
- Winkelberechnung
  - zwischen Ebenen, 23, 25
- Wirkstoffmenge, 16