

Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2023

Band 2: Prüfungsaufgaben
Berufliche Gymnasien
Baden-Württemberg

Übungsbuch mit Tipps und Lösungen



Inhaltsverzeichnis

Erfolg im Mathe-Abi	4
1. Abitur 2018	6
Teil 1 ohne Hilfsmittel	6
Teil 2 Analysis	9
Teil 3 Stochastik	13
Teil 4 Lineare Algebra	16
2. Abitur 2019	18
Teil 1 ohne Hilfsmittel	18
Teil 2 Analysis	21
Teil 3 Stochastik	25
Teil 4 Lineare Algebra	27
3. Abitur 2020	29
Teil 1 ohne Hilfsmittel	29
Teil 2 Analysis	32
Teil 3 Stochastik	36
Teil 4 Lineare Algebra	38
4. Abitur 2021	40
Teil 1 ohne Hilfsmittel	40
Teil 2 Analysis	46
Teil 3 Stochastik	50
Teil 4 Lineare Algebra	53
5. Abitur 2022	58
Teil 1 ohne Hilfsmittel	58
Teil 2 Analysis	65
Teil 3 Stochastik	69
Teil 4 Lineare Algebra	72
Tipps	76
Lösungen	123
Stichwortverzeichnis	287

Erfolg von Anfang an

... ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des Mathematik-Abiturs an Beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg abgestimmt, welches sich seit 2017 grundlegend geändert hat: Neben einem hilfsmittelfreien Teil, in dem kleinere Aufgaben ohne viel Rechenaufwand zu lösen sind, gibt es einen Teil mit Hilfsmitteln, in dem eine spezielle Merkhilfe und ein wissenschaftlicher Taschenrechner verwendet werden dürfen. Dieses Übungsbuch umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Stochastik und Lineare Algebra (Vektorgeometrie und Matrizen) sowie die Original-Abituraufgaben seit 2018 und ist für alle beruflichen Gymnasien geeignet. Daneben gibt es vom Freiburger Verlag noch ein Übungsbuch für das grundlegende Wissen für den hilfsmittelfreien Teil sowie Lernkarten, um die wesentlichen Begriffe und Rechenverfahren auf sinnvolle und effektive Art und Weise zu lernen. Die Übungsbücher fördern das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Die Übungsbücher sind eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bieten die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfungen vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Bei einigen Aufgaben ist es nötig, den Taschenrechner zu benutzen. Nicht bei allen Rechnerfunktionen ist gleich klar, wie sie aufgerufen werden.

Daher befinden sich im Buch QR-Codes für die entsprechenden Videos, in denen die Funktionen des Taschenrechners kurz erklärt werden. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.



Der Code neben diesem Text verweist beispielsweise auf ein Video zum Bestimmen der kumulierten Binomialverteilung.

frv.tv/df

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Der Ablauf der Abiturprüfung

Die Prüfung dauert 270 Minuten, also 4,5 Stunden.

Zu Beginn der Prüfung erhalten die Schülerinnen und Schüler alle Aufgaben.

Nach der Abgabe des hilfsmittelfreien Teils erhalten die Schülerinnen und Schüler die zugelassenen Hilfsmittel, z.B. die Merkhilfe und den Taschenrechner ausgehändigt.

Die Abiturprüfung besteht aus **vier Teilen**:

- Teil 1: Hilfsmittelfreier Teil,
- Teil 2: Analysis,
- Teil 3: Stochastik,
- Teil 4: Lineare Algebra (Vektorgeometrie oder Matrizen).

Der hilfsmittelfreie Teil sowie eine innermathematische Aufgabe aus Teil 2 ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten, eine anwendungsbezogene Aufgabe aus Teil 2 können die Schüler:innen selbst wählen. Die Lehrkraft wählt entweder zwei Stochastik-Aufgaben (Teil 3) **oder** zwei Aufgaben der Linearen Algebra aus (Teil 4).

Insgesamt können 90 Punkte erreicht werden.

	Punkte	Aufgabe	Wahlmöglichkeiten
Teil 1	30	Hilfsmittelfreier Teil Analysis (50%), Stochastik (25%), Vektorgeometrie oder Matrizen (25%)	Lehrkraft (seit 2021)
Teil 2	20	Analysis	keine
	10	Anwendungsorientierte Analysis	Schüler:in wählt eine aus drei vorgelegten Aufgaben aus
Teil 3	15	Stochastik	Schüler:in wählt eine aus zwei vorgelegten Aufgaben aus
Teil 4	15	Lineare Algebra: Vektorgeometrie oder Matrizen	Schüler:in wählt eine aus zwei vorgelegten Aufgaben aus

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

1 Abitur 2018

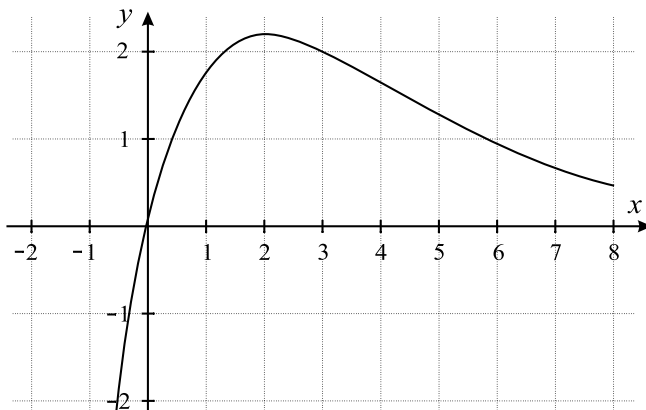
Tipps ab Seite 77, Lösungen ab Seite 123

Abitur 2018 – Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f .

6



Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

- (1) Es gilt: $f''(1) < 0$.
- (2) Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0; 3]$.
- (3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung g' für die jeweilige Funktion g .

3

- (1) $g(x) = (2x + 1)^2$
- (2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$.

3

1.3.2 Berechnen Sie: $\int_0^2 h(x) dx$.

3

15

2 Stochastik

2 In der norwegischen Stadt Oslo ist jeder zehnte PKW ein Elektroauto.

- 2.1 Auf einem kommunalen Parkplatz in Oslo beträgt die Parkgebühr für PKW 2
fünf norwegische Kronen. Elektroautos parken kostenlos. Pro Tag wird der
Parkplatz von 300 PKW genutzt.

Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, die man erwarten kann.

- 2.2 Im Folgenden werden in Oslo zufällig vorbeifahrende PKW betrachtet.

- 2.2.1 Drei PKW fahren vorbei. 4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Unter diesen PKW ist genau ein Elektroauto.

B: Unter diesen PKW ist mindestens ein Elektroauto.

- 2.2.2 Definieren Sie die Zufallsvariable X und formulieren Sie im Sachzusammenhang 2
ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden kann:

$$P(X \leq 2) = 0,9^{100} + 100 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{98}$$

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, SGG, TG, WG)

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems: 3

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

3.2 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf. 4Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

7**4 Lineare Algebra: Wahlgebiet Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen (AG, BTG, SGG, WG)**

4.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems: 3

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

4.2 Im Folgenden sind alle vorliegenden (nxn)- Matrizen invertierbar. 4

E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrixgleichung

$$(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$$

nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

7

Tipps

Das Vektorprodukt

Wenn man einen Vektor $\vec{n}$ sucht, der senkrecht auf zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht (der Normalenvektor), geschieht dies einfach und schnell mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Die Merkhilfe dazu:

1. Beide Vektoren werden je zweimal untereinander geschrieben, dann werden die erste und die letzte Zeile gestrichen.
2. Anschließend wird «über Kreuz» multipliziert. Dabei erhalten die abwärts gerichteten Pfeile ein positives und die aufwärts gerichteten Pfeile ein negatives Vorzeichen.
3. Die einzelnen Komponenten werden subtrahiert – fertig!

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nearrow \searrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \begin{array}{c} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Der Betrag des senkrecht stehenden Vektors entspricht genau der Flächenmaßzahl des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.

Beispiel: Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich für den gesuchten Vektor:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nearrow \searrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1 Abitur 2018

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

- 1.1 Für Aussage (1) beachten Sie die Krümmung von K_f im Punkt $(1 \mid f(1))$.

Für Aussage (2) bestimmen Sie die Steigung bei $x = 0$ und die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0; 3]$ als Steigung zwischen den Punkten $(0 \mid 0)$ und $(3 \mid 2)$.

Für Aussage (3) prüfen Sie, ob das Schaubild von $F' = f$ bei $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat.

- 1.2 (1) Die erste Ableitung von $g(x) = (2x + 1)^2$ erhalten Sie mit der Kettenregel («äußere Ableitung mal innere Ableitung»).

(2) Die erste Ableitung von $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$ erhalten Sie mit der Produktregel:
 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

- 1.3.1 Überlegen Sie, wie das Schaubild von h aus dem Schaubild der Funktion $\cos(x)$ hervorgegangen ist. Bestimmen Sie die Mittellinie und die Periode p von h durch $p = \frac{2\pi}{b}$.

- 1.3.2 Den Wert des Integrals erhalten Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

2 Stochastik

- 2.1 Bestimmen Sie die Anzahl der PKW, die auf dem Parkplatz bezahlen müssen.

- 2.2.1 Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Elektroautos mit den Parametern n und p fest.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A erhalten Sie mit Hilfe der Bernoulli-Formel

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B erhalten Sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der Bernoulli-Formel. Alternativ können Sie auch die Pfadregeln verwenden. Bezeichnen Sie mit E : Elektroauto und mit $\bar{E}$: kein Elektroauto und berechnen Sie $P(A) = P(E\bar{E}\bar{E}) + P(\bar{E}E\bar{E}) + P(\bar{E}\bar{E}E)$ und $P(B) = 1 - P(\bar{E}\bar{E}\bar{E})$ mit $P(E) = 0,1$ und $P(\bar{E}) = 1 - 0,1 = 0,9$.

- 2.2.2 Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Elektroautos bei 100 vorbeifahrenden PKW mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0,1$ fest. Überlegen Sie mit Hilfe der Bernoulli-Formel, was mit dem gegebenen Term bestimmt wird.

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, SGG, TG, WG)

- 3.1 Lösen Sie das gegebene Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Falls eine wahre Aussage entsteht, wählen Sie beispielsweise $x_2 = t$ und bestimmen Sie die übrigen Unbekannten in Abhängigkeit von t .
- 3.2 Um zu zeigen, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind, berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Falls das Skalarprodukt Null ergibt, sind die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal.
Skizzieren Sie das zugehörige Parallelogramm. Den Flächeninhalt A des Parallelogramms erhalten Sie mit der Formel $A = g \cdot h$.
Bestimmen Sie die Grundseite g des Parallelogramms, indem Sie die Länge des Vektors $\vec{a}$ berechnen und die Höhe h des Parallelogramms, indem Sie die Länge des Vektors $\vec{b} - \vec{a}$ berechnen.

4 Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen (AG, BTG, SGG, WG)

- 4.1 Lösen Sie das gegebene Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Falls eine wahre Aussage entsteht, wählen Sie beispielsweise $x_2 = t$ und bestimmen Sie die übrigen Unbekannten in Abhängigkeit von t .
- 4.2 Bei der gegebenen Matrizengleichung lösen Sie zuerst die Klammern auf, vereinfachen die Gleichung und multiplizieren anschließend mit einer invertierten Matrix A^{-1} . Beachten Sie, dass $A \cdot A^{-1} = E$ ergibt.

Teil 2 Aufgabe 1

- 1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen des Schaubilds K von f und beachten Sie, dass es eine einfache und eine doppelte Nullstelle gibt. Damit erhalten Sie mit Hilfe des Nullstellenansatzes b und c . Setzen Sie diese sowie die Koordinaten des Schnittpunktes P von K mit der y -Achse in den gegebenen Ansatz ein, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese nach a auf.
- 1.1.2 Die Koordinaten des Wendepunkts von K erhalten Sie mit der 2. und 3. Ableitung von f . Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auf. Prüfen Sie, ob $f'''(x) \neq 0$ ist, so dass es sich um eine Wendestelle handelt.
Den zugehörigen y -Wert erhalten Sie, indem Sie den x -Wert in $f(x)$ einsetzen. Beachten Sie, dass ein Punkt auf der ersten Winkelhalbierenden liegt, wenn der x - und der y -Wert übereinstimmen.
- 1.1.3 Bestimmen Sie den Flächeninhalt A der Fläche, den das Schaubild K mit der x -Achse einschließt, mit Hilfe eines Integrals und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Den

1 Abitur 2018

Teil 1 ohne Hilfsmittel

1 Analysis

- 1.1 Die Aussage (1), dass gilt: $f''(1) < 0$, ist wahr, da das Schaubild K_f im Punkt $(1 | f(1))$ rechtsgekrümmt ist, weil die Steigung von f abnimmt: Bei $x = 1$ ist die Steigung positiv, bei $x = 2$ ist sie Null.

Die Aussage (2), dass die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0; 3]$ ist, ist falsch, da die Steigung der Tangente bei $x = 0$ größer ist als die Steigung zwischen den Punkten $(0 | 0)$ und $(3 | 2)$: Die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall $[0; 3]$ beträgt etwa $\frac{2}{3}$, während die Tangentensteigung bei $x = 0$ etwa $m_t = 2$ ist (siehe Schaubild).

Die Aussage (3), dass das Schaubild jeder Stammfunktion F von f an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt hat, ist wahr, da das Schaubild von $F' = f$ bei $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat.

- 1.2 (1) Die erste Ableitung von $g(x) = (2x+1)^2$ erhält man mit der Kettenregel:

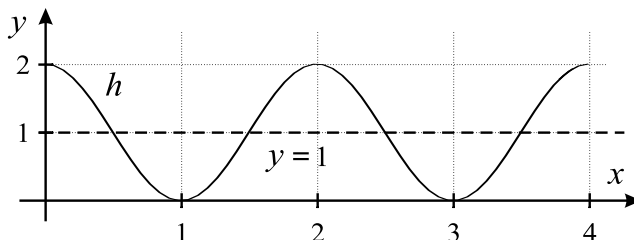
$$g'(x) = 2 \cdot (2x+1)^1 \cdot 2 = 4 \cdot (2x+1) = 8x+4$$

- (2) Die erste Ableitung von $g(x) = (x+1) \cdot e^x$ erhält man mit der Produktregel:

$$g'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$$

- 1.3.1 Um das Schaubild von $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ für $0 \leq x \leq 4$ zu skizzieren, überlegt man sich, wie das Schaubild von h aus dem Schaubild der Funktion $\cos(x)$ hervorgegangen ist: Das Schaubild von $\cos(x)$ wurde um eine LE nach oben verschoben (wegen $+1$), d.h. die Mittellinie ist $y = 1$. Außerdem wurde es in x -Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ gestreckt: Die Periode p von h erhält man durch $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Damit ergibt sich:



- 1.3.2 Den Wert des Integrals $\int_0^2 h(x)dx$ erhält man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 h(x)dx &= \int_0^2 (\cos(\pi \cdot x) + 1) dx \\
 &= \left[\frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi} + x \right]_0^2 \\
 &= \frac{\sin(\pi \cdot 2)}{\pi} + 2 - \left(\frac{\sin(\pi \cdot 0)}{\pi} + 0 \right) \\
 &= \frac{0}{\pi} + 2 - \left(\frac{0}{\pi} + 0 \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

2 Stochastik

- 2.1 Da 10% der PKW Elektroautos sind, stehen auf dem Parkplatz durchschnittlich $300 \cdot 0,1 = 30$ PKW, die nichts bezahlen. Die restlichen 270 PKW bezahlen jeweils fünf norwegische Kronen. Damit erhält man die Höhe der Einnahmen E folgendermaßen:

$$E = 30 \cdot 0 + 270 \cdot 5 = 1350$$

Man kann Einnahmen in Höhe von 1350 norwegischen Kronen erwarten.

- 2.2.1 Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Elektroautos fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 3$ und $p = 0,1$ (p ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektroauto vorbei fährt).

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: «Unter diesen PKW ist genau ein Elektroauto.» erhält man mit Hilfe der Binomialverteilung und der Bernoulli-Formel:

$$P(A) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{3-1} = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,3 \cdot 0,81 = 0,243$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: «Unter diesen PKW ist mindestens ein Elektroauto» erhält man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (also dass kein Elektroauto vorbei fährt) und der Bernoulli-Formel:

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(X \geq 1) \\
 &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - \binom{3}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{3-0} \\
 &= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,9^3 \\
 &= 1 - 0,729 \\
 &= 0,271
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die Pfadregeln verwenden. Bezeichnet man mit E: Elektroauto und mit $\bar{E}$: kein Elektroauto, so gilt: $P(E) = 0,1$ und $P(\bar{E}) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gilt:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E\bar{E}\bar{E}) + P(\bar{E}E\bar{E}) + P(\bar{E}\bar{E}E) \\ &= 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \\ &= 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 \\ &= 0,243 \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B gilt:

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{E}\bar{E}\bar{E}) \\ &= 1 - 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \\ &= 1 - 0,729 \\ &= 0,271 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A beträgt 24,3%, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B beträgt 27,1%.

2.2.2 Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Elektroautos bei 100 vorbeifahrenden PKW fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0,1$. Damit wird mit dem Term

$$P(X \leq 2) = 0,9^{100} + 100 \cdot 0,1 \cdot 0,9^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{98}$$

die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von 100 PKW höchstens 2 Elektroautos vorbeifahren.

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, SGG, TG, WG)

3.1 Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclclcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{II} & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ \text{III} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems erhält man mit Hilfe des Gaußschen Eliminierungsverfahrens.

Subtrahiert man Gleichung II vom 2-fachen von Gleichung I, ergibt sich:

$$\begin{array}{rclclcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{IIa} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ \text{III} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung III von Gleichung IIa, ergibt sich:

$$\begin{array}{rclcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{IIa} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ \text{IIIa} & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Aufgrund der wahren Aussage in Gleichung IIIa gibt es unendlich viele Lösungen. Daher wählt man beispielsweise $x_2 = t$. Setzt man $x_2 = t$ in Gleichung IIa ein, erhält man:

$$3t - x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = -5 + 3t$$

Setzt man $x_2 = t$ und $x_3 = -5 + 3t$ in Gleichung I ein, erhält man:

$$x_1 + t + (-5 + 3t) = 4 \Rightarrow x_1 = 9 - 4t$$

Damit erhält man die Lösungsmenge: $L = \{(9 - 4t; t; -5 + 3t) ; t \in \mathbb{R}\}$.

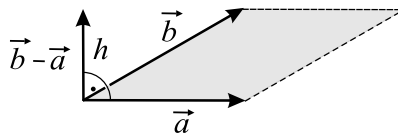
3.2 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf.

Um zu zeigen, dass die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal sind, berechnet man das Skalarprodukt:

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt Null ergibt, sind die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{a}$ zueinander orthogonal.

Damit ergibt sich folgendes Parallelogramm:



Den Flächeninhalt A des Parallelogramms erhält man mit der Formel $A = g \cdot h$.

Die Grundseite g des Parallelogramms ist die Länge des Vektors $\vec{a}$:

$$g = |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 2$$

Die Höhe h des Parallelogramms ist die Länge des Vektors $\vec{b} - \vec{a}$:

$$h = |\vec{b} - \vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Damit gilt:

$$A = g \cdot h = 2 \cdot 5 = 10$$

Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 10FE.

4 Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen (AG, BTG, SGG, WG)

4.1 Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lclclcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{II} & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ \text{III} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems erhält man mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Subtrahiert man Gleichung II vom 2-fachen von Gleichung I, ergibt sich:

$$\begin{array}{lclclcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{IIa} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ \text{III} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Subtrahiert man Gleichung III von Gleichung IIa, ergibt sich:

$$\begin{array}{lclclcl} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \text{IIa} & & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ \text{IIIa} & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Aufgrund der wahren Aussage in Gleichung IIIa gibt es unendlich viele Lösungen. Daher wählt man beispielsweise $x_2 = t$. Setzt man $x_2 = t$ in Gleichung IIa ein, erhält man:

$$3t - x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = -5 + 3t$$

Setzt man $x_2 = t$ und $x_3 = -5 + 3t$ in Gleichung I ein, erhält man:

$$x_1 + t + (-5 + 3t) = 4 \Rightarrow x_1 = 9 - 4t$$

Damit erhält man die Lösungsmenge: $L = \{ \langle 9 - 4t; t; -5 + 3t \rangle ; t \in \mathbb{R} \}$.

- 4.2 Bei der Matrizengleichung $(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$ löst man zuerst die Klammern auf, vereinfacht und multipliziert anschließend mit einer invertierten Matrix A^{-1} . Wegen $A \cdot A^{-1} = E$ ergibt sich:

$$(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$$

$$B \cdot E - B \cdot A + A \cdot E - A^2 = X \cdot A - B \cdot A$$

$$B + A - A^2 = X \cdot A$$

$$(B + A - A^2) A^{-1} = X \cdot A \cdot A^{-1}$$

$$B \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} - A^2 \cdot A^{-1} = X$$

$$B \cdot A^{-1} + E - A \cdot A \cdot A^{-1} = X$$

$$B \cdot A^{-1} + E - A = X$$

Stichwortverzeichnis

- Übergangsmatrix, 39, 55, 56
- Abstand
 - Gerade-Gerade, 16
 - Punkt zu Gerade, 20
- Baumdiagramm, 19
- Berührungspunkt, 58
- Dach, 14, 26, 37, 52, 71
- Drehachse, 14, 26, 37, 52, 71
- Drohne, 10
- Einheitsmatrix, 20
- Erlösfunktion, 24
- Erwartungswert, 13, 14, 25, 26, 36, 37, 52, 71
- Funktionsterm bestimmen, 18
- Galton-Brett, 50, 69
- Gesamtkosten, 24
- Glücksrad, 26
- Globus, 14, 26, 37, 52, 71
- kleinster Abstand, 21
- knickfreier Anschluss, 68
- Lineares Gleichungssystem, 8
- Mineralwasser, 14, 26, 37, 52, 71
- Normale, 21
- parallele Geraden, 20
- Parkgebühr, 7
- Rohstoffe, 28, 39, 55, 56
- Seitenverhältnis, 61
- Sigaregel, 15
- Stammfunktion, 18
- stochastische Matrix, 63
- stochastische Unabhängigkeit, 69
- Übergangsdiagramm, 17
- Übergangsmatrix, 17, 28
- Umkehrfunktion, 65
- Vektorprodukt, 76
- Verschiebung von Schaubildern, 21
- Vertrauensintervall, 13, 25, 36
- Vierfeldertafel, 14, 26, 37, 52, 71
- Wasserqualität, 28, 39, 55, 56
- Wetterballon, 12
- Zuschauerverhalten, 17