

Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi 2021

Baden-Württemberg

Basisfach
Schriftliche Prüfung

Übungsbuch Prüfungsaufgaben
mit Tipps und Lösungen

Freiburger
Verlag

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
Analysis	9
1 HMF Analysis	9
2 Straße	13
3 Medikament	15
Geometrie	17
4 HMF Geometrie	17
5 Platte	19
6 Haus	20
Stochastik	22
7 HMF Stochastik	22
8 Weizen	27
9 Kugeln	28
Tipps	29
Lösungen	44
Abituraufgaben 2017	97
Abituraufgaben 2018	143
Abituraufgaben 2019	192
Abituraufgaben 2020	242
Stichwortverzeichnis	287

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs.

Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des Pflichtteils (hilfsmittelfreier Teil: HMF) und Wahlteils des Mathematik-Abiturs im Basisfach ab 2021 in Baden-Württemberg für Waldorfschulen, Abendgymnasien und Schulfremde abgestimmt. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Geometrie und Stochastik sowie angepasste und erweiterte Abituraufgaben seit 2017 in einem Buch.

Ab 2021 ist die Struktur des hilfsmittelfreien Teils geändert:¹ *Daher haben wir frühere Original-Prüfungsaufgaben teilweise gekürzt oder erweitert und an die neuen Bestimmungen angepasst.* Somit erhalten Sie die bestmögliche Vorbereitung auf die Abiturprüfung.

Der Pflichtteil (HMF) besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung zu lösen sind. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Der Wahlteil besteht aus komplexeren Aufgaben, die teilweise aufeinander aufbauen.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen



Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

¹Es sind insgesamt maximal 12,5 Verrechnungspunkte (VP) zu erreichen, davon 5-7,5 VP in Analysis (2-3 Aufgaben a 2,5 VP), 2,5-5 VP in Geometrie (1-2 Aufgaben a 2,5 VP) und 2,5-5 VP in Stochastik (1-2 Aufgaben a 2,5 VP). Im Wahlteil sind insgesamt 37,5 VP zu erreichen, davon 17,5 VP in Analysis, 10 VP in Geometrie und 10 VP in Stochastik

Der Aufbau des Mathematik-Abiturs

- Die gesamte Prüfungszeit beträgt 225 Minuten (3 Stunden und 45 Minuten).
- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Prüfung alle Aufgaben (den Pflichtteil (HMF) und den vom Lehrer ausgesuchten Wahlteil Analysis, Geometrie und Stochastik). Sie erhalten zu diesem Zeitpunkt noch keine Hilfsmittel.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zuerst den Pflichtteil (HMF). Nach dessen Abgabe erhalten sie die Hilfsmittel (Taschenrechner, Merkhilfe) für den Wahlteil.

Insgesamt können maximal 50 Verrechnungspunkte in der Prüfung erzielt werden, davon 12,5 VP im Pflichtteil (HMF) und 37,5 VP im Wahlteil.

Aus den Verrechnungspunkten ergeben sich folgende Notenpunkte:

Verrechnungspunkte	Notenpunkte	Note
0 - 9	0	ungenügend
10 - 13	1	mangelhaft
14 - 16	2	
17 - 19	3	
20 - 22	4	ausreichend
23 - 24	5	
25 - 27	6	
28 - 29	7	befriedigend
30 - 32	8	
33 - 34	9	
35 - 37	10	gut
38 - 39	11	
40 - 42	12	
43 - 44	13	sehr gut
45 - 47	14	
48 - 50	15	

Allen Schülerinnen und Schülern, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

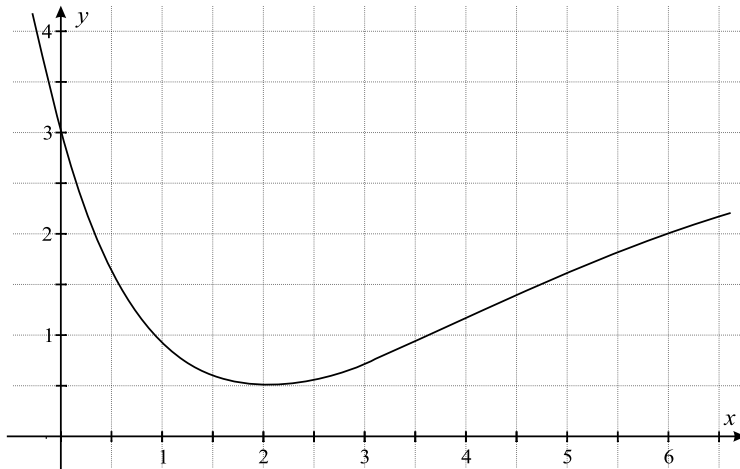
Analysis



Tipps ab Seite 29, Lösungen ab Seite 44

1 HMF Analysis

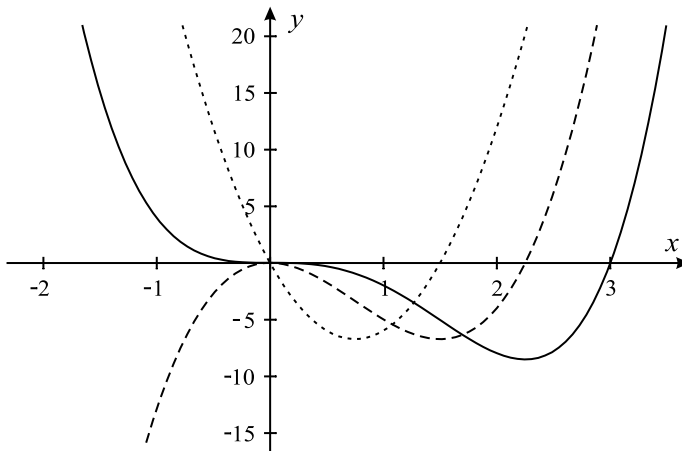
- 1) Die Abbildung zeigt den Graphen der auf \mathbb{R} definierten Funktion f .



- a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)dx$.
- b) Die Funktion F ist die auf \mathbb{R} definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$. Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle 2 an.
- c) Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.
- 2) Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$.
- a) Zeigen Sie, dass $f'(3) = -\frac{3}{e}$ gilt.
- b) Bestimmen Sie die Gleichung einer Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3.
- 3) Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ gegeben.
- a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f .
- b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0 | 1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

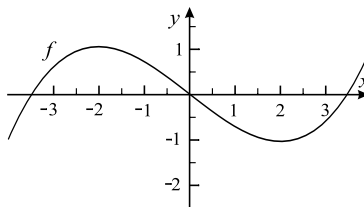


- 4) Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^3$ und die Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitung. □

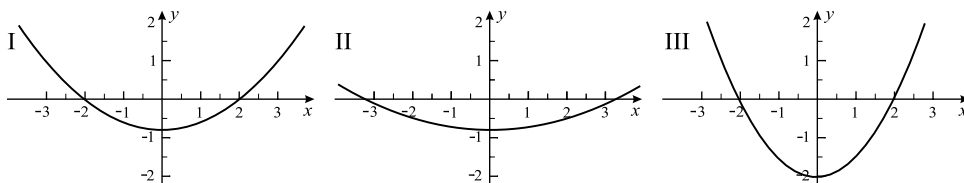


- a) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f und ordnen Sie die Ableitungsfunktionen den abgebildeten Graphen zu.
- b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ursprung $(0 | 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist.

- 5) Der abgebildete Graph stellt eine Funktion f dar. □



- a) Einer der folgenden Graphen I, II oder III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f .



Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

- b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f . Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1; 3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Tipps – Analysis

1 HMF Analysis

- 1)
 - a) Beachten Sie, dass dem gegebenen Integral in der Abbildung der Flächeninhalt A zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall $[3; 5]$ entspricht. Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Fläche durch Abzählen der Kästchen oder indem Sie den Flächeninhalt eines Trapezes bestimmen. Verwenden Sie für den Flächeninhalt des Trapezes die Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei a und c die parallelen Seiten des Trapezes sind. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Funktionswerte an den entsprechenden Stellen.
 - b) Beachten Sie, dass f die 1. Ableitung von F ist. Bestimmen Sie daher den Funktionswert von f an der Stelle 2 durch Ablesen.
 - c) Bestimmen Sie das Integral $\int_3^b f(x) dx$ mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und verwenden Sie $F(3) = 0$.
- 2)
 - a) Die 1. Ableitung von f erhalten Sie mithilfe der Produkt- und Kettenregel. Setzen Sie $x = 3$ in $f'(x)$ ein und beachten Sie, dass $e^{-1} = \frac{1}{e}$ ist,
 - b) Bestimmen Sie zuerst die Koordinaten des Berührungspunkts B , indem Sie $x = 3$ in $f(x)$ einsetzen. Die Steigung m der Tangente t ist die 1. Ableitung an der Stelle 3, also $m = f'(3)$. Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3 erhalten Sie, indem Sie m und die Koordinaten von B in die Hauptform $y = mx + b$ oder in die Punkt-Steigungsform $y - y_P = m \cdot (x - x_P)$ einsetzen.
- 3)
 - a) Die Nullstelle von f erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f(x) = 0$ durch Logarithmieren lösen.
 - b) Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt S erhalten Sie, indem Sie zuerst die Steigung m der Tangente t mithilfe der 1. Ableitung von f bestimmen. Verwenden Sie die Kettenregel und setzen Sie den x -Wert von S in $f'(x)$ ein.
Setzen Sie anschließend m und die Koordinaten von S in die Hauptform $y = mx + b$ oder in die Punkt-Steigungsform $y - y_Q = m \cdot (x - x_Q)$ ein, um die Gleichung der Tangente t zu erhalten. Der Schnittpunkt S von t mit der y -Achse ist schon gegeben, den Schnittpunkt N von t mit der x -Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $y = 0$ nach x auflösen. Skizzieren Sie das Dreieck OSN und überlegen Sie, welche Seiten die gleiche Länge besitzen.
- 4)
 - a) Die erste und zweite Ableitung von f erhalten Sie mit der Potenzregel. Beachten Sie, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades eine Parabel ist.
 - b) Um zu zeigen, dass der Ursprung $(0 | 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist, setzen Sie $x = 0$ in $f(x)$,

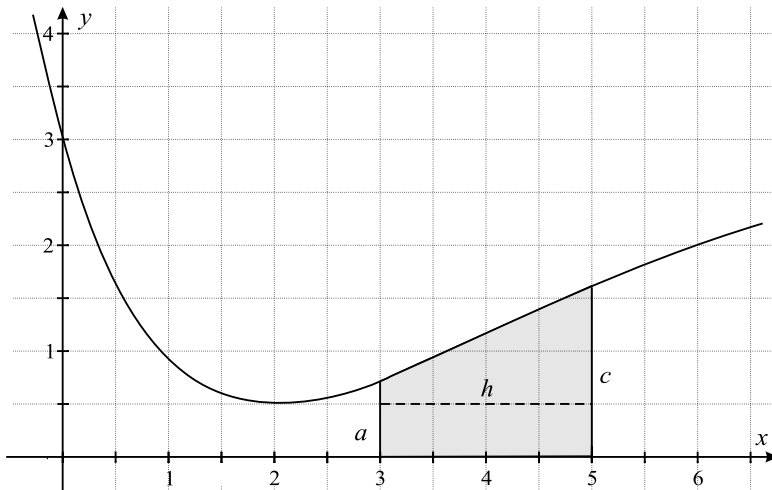
$f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ ein. Falls $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ liegt bei $x = 0$ eine Wendestelle mit waagerechter Steigung vor.

- 5) a) Beachten Sie, dass die Extremstellen des Graphen von f die Nullstellen des Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f sind. Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x = 0$ und prüfen Sie, welcher der Graphen an dieser Stelle einen anderen Funktionswert hat.
b) Beachten Sie, dass $F'(x) = f(x)$ gilt. Falls $F'(x)$ im Intervall $[1; 3]$ kleiner als Null ist, ist F streng monoton fallend, sonst monoton wachsend.
- 6) a) Die Periode p von f erhalten Sie durch $p = \frac{2\pi}{b}$. Skizzieren Sie damit das Schaubild von f .
b) Zur Lösung der gegebenen Gleichung substituieren Sie $\frac{\pi}{2}x = z$ und lösen die Gleichung $\sin(z) = -1$ nach z auf. Durch Resubstitution erhalten Sie eine Lösung für x .
- 7) a) Beachten Sie die Anzahl der Extrempunkte, die Symmetrie und das Verhalten der Graphen für $x \rightarrow \pm\infty$.
b) Das angegebene Integral erhalten Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Verwenden Sie die angegebene Funktion h als Stammfunktion.
- 8) a) Überlegen Sie, wie der Graph von e^{-x} aus dem Graph von e^x hervorgeht und welche Bedeutung das Minuszeichen vor e^{-x} sowie die Zahl (+2) haben.
b) Bestimmen Sie mithilfe der Kettenregel die 1. Ableitung von $f(x)$ und $g(x)$ und berechnen Sie $f(0)$, $g(0)$, $f'(0)$ und $g'(0)$.
- 9) a) Beachten Sie, dass der Graph von f eine nach oben verschobene Normalparabel und der Graph von g eine Gerade ist.
b) Stellen Sie zuerst eine Funktion $d(x)$ auf, welche die Differenz der Funktionswerte von f und g angibt. Anschließend bestimmen Sie das Minimum von $d(x)$ mit der 1. und 2. Ableitung von $d(x)$. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $d'(x) = 0$ und prüfen Sie, ob $d''(x) > 0$ ist.
- 10) Überlegen Sie, welche Schaubilder die Graphen trigonometrischer Funktionen sind. Betrachten Sie beispielsweise bei $x \approx 3$, welches Schaubild einen Sattelpunkt hat, welches Schaubild die x -Achse berührt (Tiefpunkt) und welches Schaubild eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat.
Überlegen Sie, welche Schaubilder die Graphen ganzrationaler Funktionen sind und welchen Grad die Funktionen jeweils haben.
- 11) a) Den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagrechte Tangente hat, erhalten Sie mithilfe der 1. Ableitung von h , die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Lösen Sie die Gleichung $h'(x) = 0$ nach x durch Logarithmieren auf. Den zugehörigen y -Wert erhalten Sie, indem Sie den x -Wert in $h(x)$ einsetzen.

Lösungen – Analysis

1 HMF Analysis

- 1) a) Dem Integral $\int_3^5 f(x)dx$ entspricht in der Abbildung der Flächeninhalt A zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall $[3; 5]$.



Durch Abzählen der Kästchen erhält man einen Näherungswert für die Fläche:

$$A = \int_3^5 f(x)dx \approx 2,3$$

Alternativ kann man den Flächeninhalt A auch durch den Flächeninhalt eines Trapezes abschätzen:

Den Flächeninhalt eines Trapezes erhält man mit der Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$. Die beiden parallelen Seiten des Trapezes sind $a = f(3) \approx 0,7$ und $c = f(5) \approx 1,6$. Für die Höhe h gilt: $h = 5 - 3 = 2$. Damit erhält man:

$$A = \frac{f(3) + f(5)}{2} \cdot 2 \approx \frac{0,7 + 1,6}{2} \cdot 2 = 2,3$$

Somit hat das gegebene Integral einen Näherungswert von etwa 2,3.

- b) Da die Funktion F eine Stammfunktion von f ist, ist f die 1. Ableitung von F. Damit erhält man einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle 2 mithilfe der Abbildung, indem man den Funktionswert von f an der Stelle 2 abliest:

$$F'(2) = f(2) \approx 0,5$$

- c) Da die Funktion F die Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$ ist, gilt mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_3^b f(x) dx = [F(x)]_3^b = F(b) - F(3) = F(b) - 0 = F(b)$$

Somit gilt: $F(b) = \int_3^b f(x) dx$ mit $b \in \mathbb{R}$.

- 2) Es ist $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$.

- a) Die 1. Ableitung von f bestimmt man mithilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{2-x} + x^2 \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (2x - x^2) \cdot e^{2-x}$$

Setzt man $x = 3$ in $f'(x)$ ein, erhält man:

$$f'(3) = (2 \cdot 3 - 3^2) \cdot e^{2-3} = -3 \cdot e^{-1} = -\frac{3}{e}$$

Somit gilt: $f'(3) = -\frac{3}{e}$.

- b) Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle 3 erhält man, indem man zuerst die Koordinaten des Berührungspunkts B bestimmt. Setzt man $x = 3$ in $f(x)$ ein, ergibt sich:

$$y = f(3) = 3^2 \cdot e^{2-3} = 9 \cdot e^{-1} = \frac{9}{e} \Rightarrow B \left(3 \mid \frac{9}{e} \right)$$

Die Steigung m der Tangente t ist die 1. Ableitung an der Stelle 3, also:

$$m = f'(3) = -\frac{3}{e}$$

Setzt man m und die Koordinaten von B in die Hauptform $y = mx + b$ ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{9}{e} &= -\frac{3}{e} \cdot 3 + b \\ \frac{9}{e} &= -\frac{9}{e} + b \\ \frac{18}{e} &= b \end{aligned}$$

Alternativ setzt man m und die Koordinaten von B in die Punkt-Steigungsform ein:

$$\begin{aligned} y - y_B &= m \cdot (x - x_B) \\ t: y - \frac{9}{e} &= -\frac{3}{e} \cdot (x - 3) \\ t: y - \frac{9}{e} &= -\frac{3}{e} \cdot x + \frac{9}{e} \\ t: y &= -\frac{3}{e} \cdot x + \frac{18}{e} \end{aligned}$$

Somit hat die Tangente t an den Graphen von f an der Stelle 3 die Gleichung

$$t: y = -\frac{3}{e} \cdot x + \frac{18}{e}$$

3) Es ist $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$.

a) Die Nullstelle von f erhält man durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$:

$$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$$

$$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 1$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Somit hat f die Nullstelle $x = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $S(0 | 1)$ erhält man, indem man zuerst die Steigung m der Tangente t mithilfe der 1. Ableitung von f bestimmt. Die 1. Ableitung von f erhält man mit der Kettenregel:

$$f'(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}$$

Setzt man $x = 0$ in $f'(x)$ ein, ergibt sich:

$$m = f'(0) = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 1$$

Setzt man m und die Koordinaten von S in die Hauptform $y = mx + b$ ein, ergibt sich:

$$1 = 1 \cdot 0 + b$$

$$1 = b$$

Alternativ setzt man m und die Koordinaten von S in die Punkt-Steigungsform ein:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$t: y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$$

$$t: y = x + 1$$

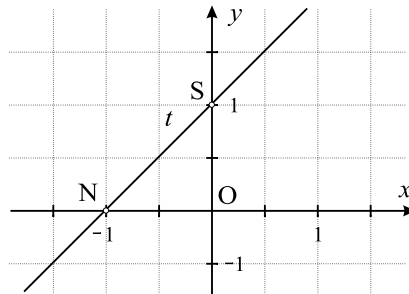
Somit hat die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $S(0 | 1)$ die Gleichung:

$$t: y = x + 1$$

Der Schnittpunkt von t mit der y -Achse ist der gegebene Punkt $S(0 | 1)$.

Den Schnittpunkt N von t mit der x -Achse erhält man, indem man die Gleichung $y = 0$ nach x auflöst:

$$0 = x + 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow N(-1 | 0)$$



Das Dreieck OSN , welches die Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt, hat zwei Seiten mit jeweils der Länge 1 LE, nämlich $\overline{OS} = 1$ und $\overline{ON} = 1$. Somit ist das Dreieck OSN gleichschenkelig.

4) Es ist $f(x) = x^4 - 3x^3$.

a) Die erste und zweite Ableitung von f erhält man mit der Potenzregel:

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x$$

Da die erste Ableitung von f eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist, gehört sie zum gestrichelten Graphen (kubische Parabel). Da die zweite Ableitung von f eine ganzrationale Funktion zweiten Grades ist, gehört sie zum gepunkteten Graphen (Parabel).

b) Um zu zeigen, dass der Ursprung $(0 | 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist, setzt man $x = 0$ in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x) = 24x - 18$ ein:

$$f(0) = 0^4 - 3 \cdot 0^3 = 0$$

$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 = 0$$

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 = 0$$

$$f'''(0) = 24 \cdot 0 - 18 = -18$$

Wegen $f(0) = 0$ liegt der Ursprung $(0 | 0)$ auf dem Graphen von f .

Wegen $f'(0) = 0$ hat der Graph von f im Ursprung eine waagerechte Tangente.

Wegen $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ liegt bei $x = 0$ eine Wendestelle vor.

Somit ist der Ursprung ein Sattelpunkt des Graphen von f .